

œ Brevet Élémentaire du Premier Cycle œ

Bordeaux juin 1962

ENSEIGNEMENT LONG ET ENSEIGNEMENT COURT.

GÉOMÉTRIE

Un point M décrit un demi-cercle de diamètre [AB], de centre O.

Par un point D du diamètre [AB] on mène la perpendiculaire (DX- à ce diamètre.

(DX) coupe le demi-cercle en K.

On trace (AM) et (BM), qui coupent la perpendiculaire (DX) respectivement en I et J.

1. Que peut-on dire des triangles DAI, MAB et DJB?

En déduire les relations

$$DA \cdot AB = AM \cdot AI \quad \text{et} \quad DA \cdot DB = DI \cdot DJ.$$

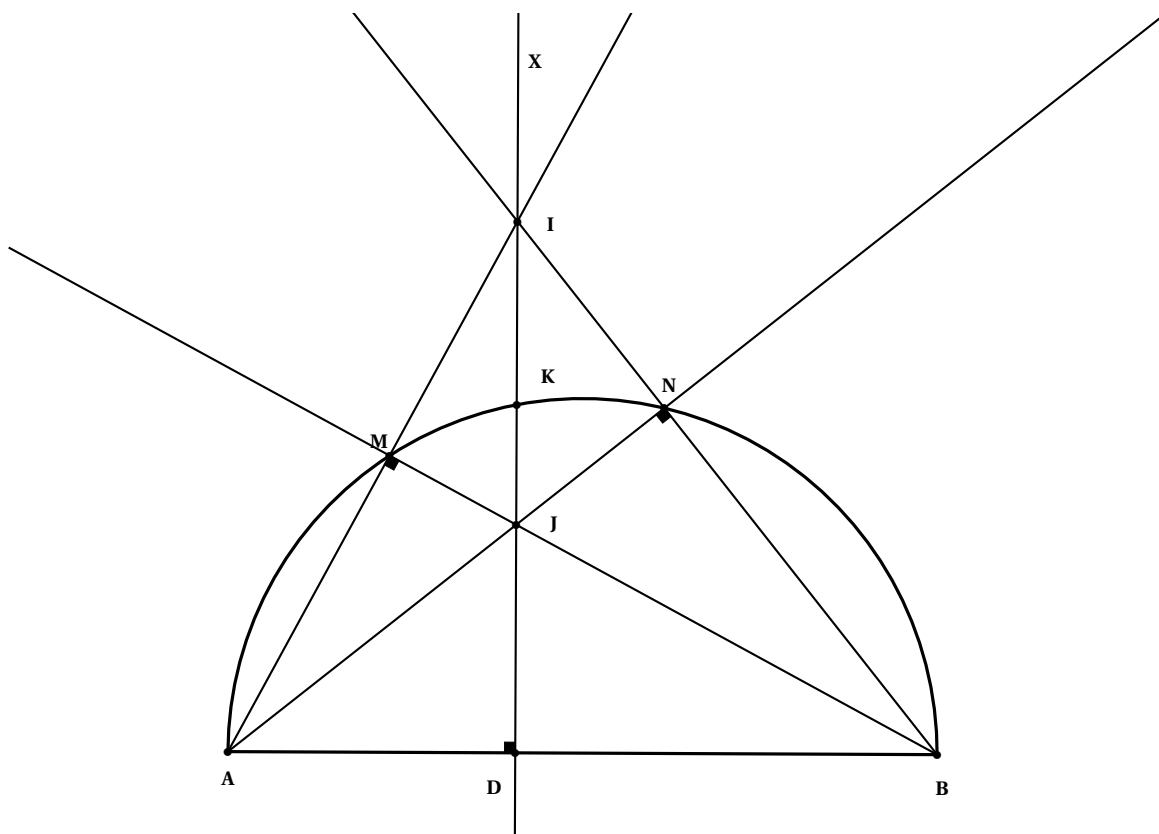
2. Que deviennent les relations précédentes lorsque M est en K?

Quels sont les théorèmes connus qui se trouvent vérifiés?

3. (AJ) coupe (BI) en N.

Démontrer que le quadrilatère MINJ est inscritible dans un cercle.

Sur quelle ligne se déplace le point N?



1. Que peut-on dire des triangles DAI, MAB et DJB?

DAI et MAB sont semblables.

En effet, ce sont des triangles rectangle ayant un angle aigu en commun car  $\widehat{DAI} =$

$\widehat{BAM}$  le point D appartenant au segment AB et M au segment AI. MAB est rectangle car il est inscrit sans le cercle de diamètre AB.

MAB et DIB sont semblables.

Même raisonnement, les angles aigus égaux sont  $\widehat{ABM}$  et  $\widehat{DBI}$ , les points D et I appartenant respectivement au segment AB et BM.

En déduire les relations

$$DA \cdot AB = AM \cdot AI \quad \text{et} \quad DA \cdot DB = DI \cdot DJ.$$

La similitude des triangles DAI et MAB entraîne l'égalité des rapports :  $\frac{DA}{MA} = \frac{AI}{AB}$

et celle de DAI et DJB entraîne  $\frac{DA}{DJ} = \frac{DI}{DB}$ .

et donc les produits « en croix » sont égaux ce qui donne les égalités demandées.

Remarque : les triangles DAI et DJB sont semblables car ils sont semblables tous les deux à MAB.

On utilise le fait que dans deux triangles semblables les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés de l'autre qui sont en face d'angles égaux.

Moyen pratique :

Pour les triangles DAI et MAB on écrit :  $\frac{DAI}{MAB}$  avec les sommets des angles égaux en colonnes, on obtient alors les égalités

$$\frac{DA}{MA} = \frac{DI}{MB} = \frac{AI}{AB}$$

2. Que deviennent les relations précédentes lorsque M est en K?

Si M est en K  $M = K = I = J$  et les relations deviennent :

$$AD \cdot AB = AK^2 \quad \text{et} \quad DA \cdot DB = DK^2$$

Quels sont les théorèmes connus qui se trouvent vérifiés?

$AD \cdot AB = AK^2$  : dans un triangle rectangle un petit côté est moyenne géométrique de sa projection sur l'hypothénuse et de cette hypothénuse.

$DA \cdot DB = DK^2$  : dans un triangle rectangle la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne géométrique des segments qu'elle définit sur l'hypothénuse.

3. (AJ) coupe (BI) en N.

Démontrer que le quadrilatère MINJ est inscrit dans un cercle.

Le point J est l'orthocentre du triangle ABI, c'est le point d'intersection des deux hauteurs ID et BM par hypothèse donc AJ est la troisième car les hauteurs d'un triangle sont concourantes, ici au point J, et la droite AJ est perpendiculaire à BI, le triangle IJN est rectangle, les points I, N, J sont cocycliques sur le cercle de diamètre [IJ].

Le triangle MIJ est rectangle en M donc les points M, I, J sont sur le cercle précédent, le quadrilatère MIJN est donc inscrit dans le cercle de diamètre IJ.

Sur quelle ligne se déplace le point N?

Le triangle ABN est rectangle en N donc inscrit dans le cercle de diamètre AB, N se déplace sur le cercle de diamètre [AB].