∽ Corrigé du baccalauréat de technicien hôtellerie ∾ Métropole – juin 2007

Exercice 1 — 7 points

Le directeur d'un hôtel souhaite connaître l'évolution de la fréquentation du site Internet de son établissement. Il consulte les données sur les huit premiers mois de l'année 2006.

Mois	janvier	février	mars	avril	mai	juin	juillet	août
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de connexions y_i	112	126	151	159	169	185	200	214

1. On calcule le pourcentage par la formule : $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$.
Le pourcentage d'augmentation du nombre de connexions entre le mois de janvier et le mois d'août est $\dfrac{214-112}{112} \times 100 \approx 91\,\%$.
2. On représente le nuage de points dans un repère (voir page 3).
3. Le point moyen G_1 associé aux quatre premiers mois a pour coordonnées :
$x_{G_1} = \dfrac{1+2+3+4}{4} = \dfrac{10}{4} = 2,5$ et $y_{G_1} = \dfrac{112+126+151+159}{4} = \dfrac{548}{4} = 137$.
Le point moyen G_2 associé aux quatre derniers mois a pour coordonnées :
$x_{G_2} = \dfrac{5+6+7+8}{4} = \dfrac{26}{4} = 6,5$ et $y_{G_2} = \dfrac{169+185+200+214}{4} = \dfrac{768}{4} = 192$.
On place ces points sur le graphique puis on trace la droite (G_1G_2) (voir page 3).
4. La droite (G_1G_2) a une équation de la forme : $y = ax+b$.
Le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \dfrac{192-137}{6,5-2,5} = \dfrac{55}{4} = 13,75$.
Donc l'équation est de la forme $y = 13,75x + b$.
La droite passe par le point G_1 donc :
$y_{G_1} = 13,75x_{G_1} + b \iff 137 = 13,75 \times 2,5 + b \iff 137 - 34,375 = b \iff b = 102,625$.
La droite (G_1G_2) a donc pour équation $y = 13,75x + 102,625$.
5. On admet que la droite (G_1G_2) réalise une bonne approximation du nombre de connexions jusqu'à la fin de l'année 2007.

   a. Le mois de décembre 2006 correspond à $x = 12$. D'après le graphique, le nombre prévisible de connexions en décembre 2006 est d'environ 268 (voir page 3).

   b. On devrait atteindre 500 connexions pour le rang x tel que $13,75x + 102,625 = 500$.
   On résout cette équation :
   $13,75x + 102,625 = 500 \iff 13,75x = 397,375 \iff x = \dfrac{397,375}{13,75} \iff x = 28,9$
   Le rang $x = 28$ correspond à avril 2008 donc c'est au cours de ce mois que l'on atteindra les 500 connexions.

Exercice 2 — 13 points

Partie A (étude mathématique)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[30~;~120]$ par : $f(x) = 2x - 230 + \dfrac{7200}{x}$.

1. $f'(x) = 2 - 0 + \dfrac{0 \times x - 7200 \times 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 7200}{x^2} = \dfrac{2(x-3600)}{x^2} = \dfrac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$

2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[30\,;\,120]$:

x	30		60		120
$x-60$		$-$	0	$+$	
$x+60$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)=\dfrac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$		$-$	0	$+$	

On calcule : $f(30)=70$, $f(60)=10$ et $f(120)=70$.
On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[30\,;\,120]$:

x	30		60		120
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	70	$\searrow$	10	$\nearrow$	70

3. **a.** On complète le tableau de valeurs suivant en arrondissant les valeurs à 10^{-1} près :

x	30	40	50	55	60	65	70	90	120
$f(x)$	70	30	14	10,9	10	10,8	12,9	30	70

b. On trace la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (voir page 4).

4. À l'aide du graphique, on peut dire que les solutions de l'équation $f(x)=35$ sont entre 38 et 39 pour la première, entre 94 et 95 pour la seconde (voir page 4).

Partie B (étude de coût)

Dans un restaurant, le coût moyen unitaire exprimé en euros de fabrication de x repas est donné par la relation : $C_M(x)=2x-230+\dfrac{7\,200}{x}$ pour x compris entre 30 et 120.

1. D'après la partie A, le nombre de repas qui donne un coût moyen unitaire minimum est 60, pour un coût de 10 €.

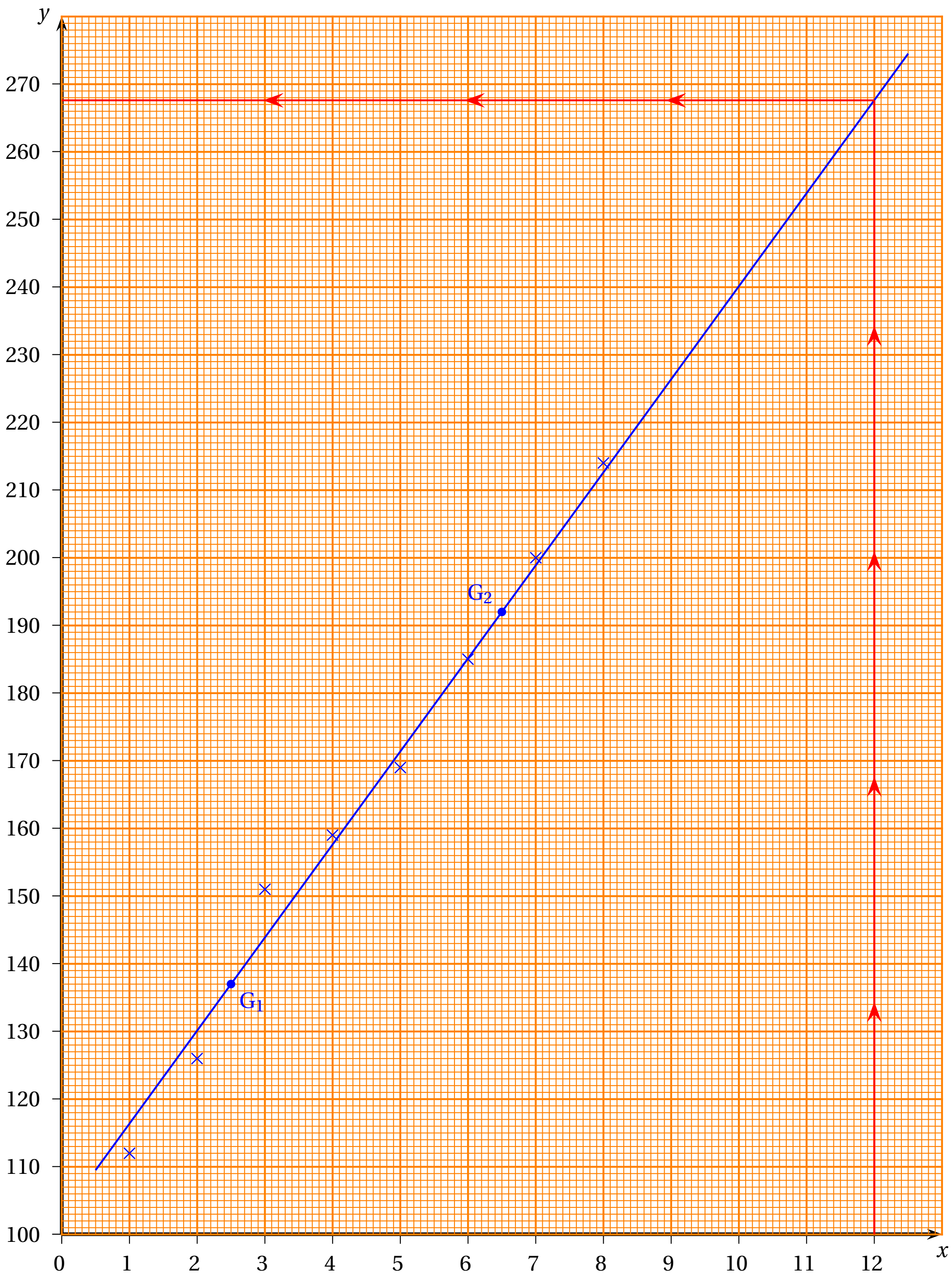
2. Le coût moyen unitaire est $2x-230+\dfrac{7\,200}{x}$ pour x repas, ce qui fait un coût total de $\left(2x-230+\dfrac{7\,200}{x}\right)\times x=2x^2-230x+7\,200$ qu'on appelle $C(x)$.

3. Le restaurateur propose le repas au prix de 35 € donc la vente de x repas rapporte $35x$.

a. Le bénéfice réalisé $B(x)$ est obtenu par
$B(x)=35x-C(x)=35x-\left(2x^2-230x+7\,200\right)=35x-2x^2+230x-7\,200=-2x^2+265x-7\,200.$

b. Il y a bénéfice quand : $35x>C(x)$ autrement dit quand : $35x>2x^2-230x+7\,200$ ou encore quand : $35>2x-230+\dfrac{7\,200}{x}$ c'est-à-dire quand : $35>f(x)$.
D'après la question **A.4** et le graphique de la page 4, on peut dire que le restaurateur réalise un bénéfice pour un nombre de repas compris entre 39 et 94.

Graphique de l'exercice 1



Graphique de l'exercice 2