∽ Corrigé du baccalauréat de technicien hôtellerie ∾
Métropole – septembre 2006

EXERCICE 1 — 9 points

Un restaurateur veut acheter des tables et des chaises pour son restaurant.
Il veut au moins 15 tables et 70 chaises.
Un fournisseur A lui propose un lot de 1 table et 6 chaises pour 75 €.
Un fournisseur B lui propose un lot de 1 table et 4 chaises pour 60 €.
On désigne par x le nombre de lots A et y le nombre de lots B achetés par le restaurateur.

1. On trace sur l'annexe 1 les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $y = -x + 15$ et $y = -1{,}5x + 17{,}5$.
   On utilisera les points de coordonnées $(0~;~15)$ et $(15~;~0)$ pour $\mathscr{D}_1$, $(1~;~16)$ et $(9~;~4)$ pour $\mathscr{D}_2$.

2. Soit le système (S) : $\left\{\begin{array}{lcl} x+y & \geqslant & 15\\ 3x+2y & \geqslant & 35\\ x & \geqslant & 0\\ y & \geqslant & 0\end{array}\right.$

   - Il y a 1 table dans le lot A donc si on achète x lots A, on aura x tables.
     Il y a 1 table dans le lot B donc si on achète y lots B, on aura y tables.
     Si on achète à la fois x lots A et y lots B, on aura donc $x + y$ tables.
     Il faut au moins 15 tables donc x et y doivent vérifier l'inégalité : $x + y \geqslant 15$.
   - Il y a 6 chaises dans le lot A donc si on achète x lots A, on aura $6x$ chaises.
     Il y a 4 chaises dans le lot B donc si on achète y lots B, on aura $4y$ chaises.
     Si on achète à la fois x lots A et y lots B, on aura donc $6x + 4y$ chaises.
     Il faut au moins 70 chaises donc x et y doivent vérifier l'inégalité : $6x + 4y \geqslant 70$ c'est-à-dire : $3x + 2y \geqslant 35$.
   - Les nombres de tables et de chaises doivent être entiers et positifs donc $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

   Les contraintes sur x et y pour qu'il y ait suffisamment de tables et de chaises se traduisent donc par le système (S) avec x et y entiers.

3. Dans le repère de l'annexe 1, on détermine l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système (S) en hachurant la partie du plan qui ne convient pas.

4. On note C le coût de x lots A et y lots B.
   a. Un lot A coûte 75 € donc x lots coûtent $75x$ €. Un lot B coûte 60 € donc y lots coûtent $60y$ €.
   L'achat de x lots A et y lots B coûte donc : $C = 75x + 60y$.
   b. Pour un coût de 1 140 €, on aura donc $1\,140 = 75x + 60y$ ou encore $\dfrac{1\,140}{60} - \dfrac{75}{60} = y$ donc $y = -\dfrac{5}{4}x + 19$.
   Donc $y = -\dfrac{5}{4}x + 19$ est une équation de la droite $\mathscr{D}$ correspondant à un coût C de 1 140 €.
   c. On trace la droite $\mathscr{D}$ dans le repère de l'annexe 1 en utilisant les points de coordonnées $(4~;~14)$ et $(12~;~4)$.
   d. La droite correspondant au coût C a pour équation $C = 75x + 60y$ c'est-à-dire $y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{C}{60}$.
   Elle est parallèle à la droite $\mathscr{D}$ et a pour ordonnée à l'origine $\dfrac{C}{60}$.
   Il faut que le coût soit minimum, donc que l'ordonnée à l'origine soit la plus petite possible parmi toutes les droites parallèles à la droite $\mathscr{D}$, tout en ayant pour contrainte que la droite réalisant ce minimum doit passer par un point à coordonnées entières de la partie non hachurée du plan.
   Graphiquement le minimum est réalisé par la droite Δ qui passe par le point A de coordonnées $(5~;~10)$.
   Le coût est alors de $5 \times 75 + 10 \times 60 = 975$ €.

EXERCICE 2 11 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~45]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 15x^2$.

1. $f'(x) = -\dfrac{1}{3} \times 3x^2 + 15 \times 2x = -x^2 + 30x = x(-x+30)$.

2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0~;~45]$ au moyen d'un tableau de signes :

x	0		30		45
x	0	+		+	
$-x+30$		+	0	−	
$f'(x) = x(-x+30)$	0	+	0	−	

$f(0) = 0$, $f(30) = 4\,500$ et $f(45) = 0$; on établit le tableau de variations de f sur $[0~;~45]$:

x	0		30		45
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4 500	$\searrow$	0

3. On complète le tableau de valeurs suivant en arrondissant à l'unité :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$f(x)$	0	333	1 167	2 250	3 333	4 167	4 500	4 083	2 667	0

4. $f'(0) = 0$ donc la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est horizontale ; comme elle passe par le point de coordonnées $(0~;~0)$, la tangente T est l'axe des abscisses.

5. On trace la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T dans le repère page 4.

Partie B

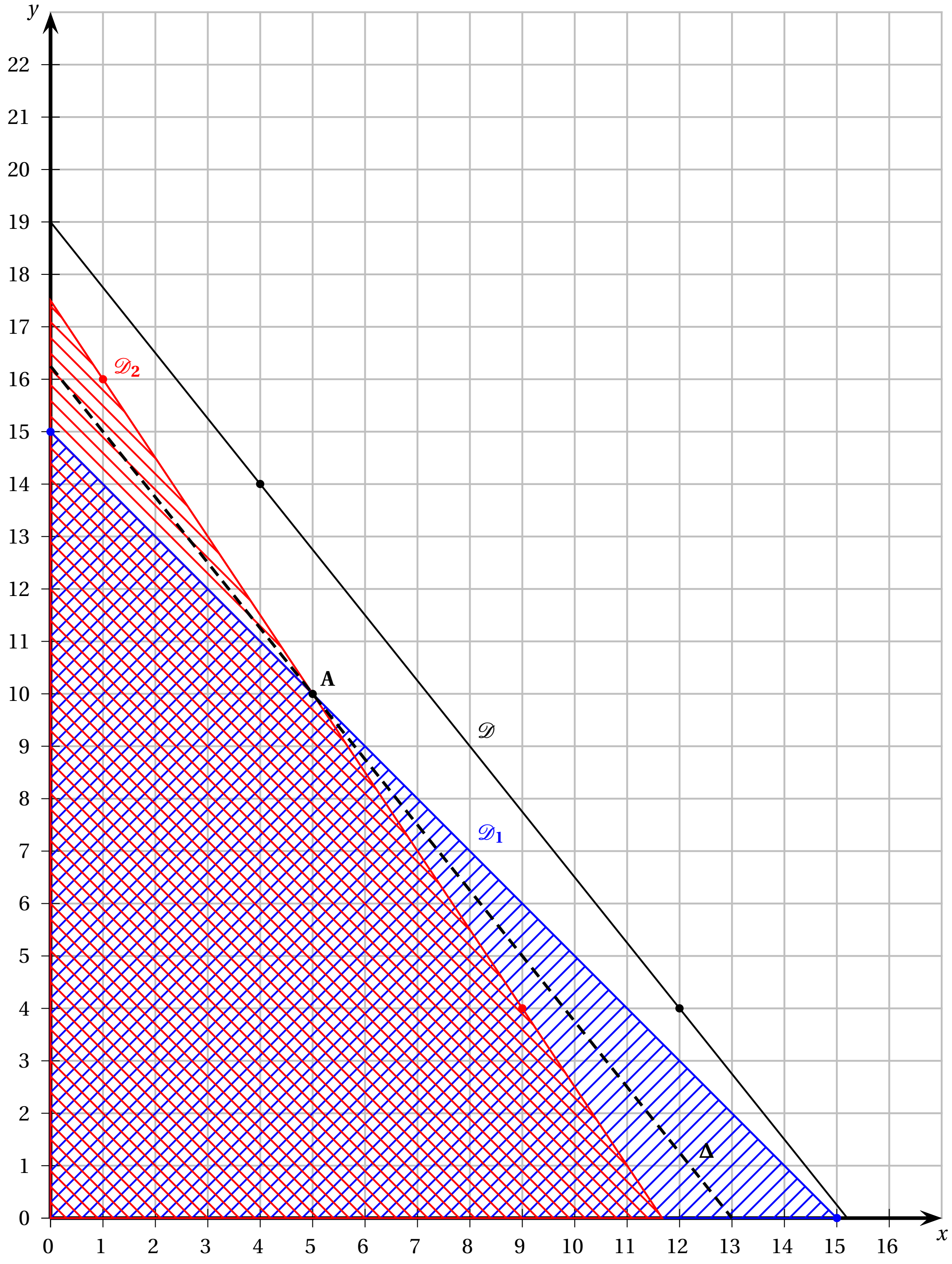
Un producteur de cuisines équipées produit et vend chaque mois x cuisines équipées d'un certain modèle. On admet que le bénéfice mensuel en euros est donné par $B(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 15x^2$.

1. D'après la partie A, le bénéfice est maximum pour $x = 30$.
Ce bénéfice maximum est alors de $B(30) = f(30) = 4\,500$ €.

2. Graphiquement, les quantités de cuisines équipées produites et vendues correspondant à un bénéfice d'à peu près 3 500 € sont 21 et 37 (voir page 4).

3. Pour que le bénéfice soit supérieur à 3 500 €, il faut que la courbe $\mathcal{C}$ soit au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = 3500$; il faut donc prendre x dans l'intervalle $[21~;~37]$ (voir page 4).

Annexe 1



y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
A
$\mathscr{D}$
$\mathscr{D}_1$
$\mathscr{D}_2$
Δ

Graphique de l'exercice 2