∽ Corrigé du baccalauréat de technicien hôtellerie ∾
Métropole septembre 2008

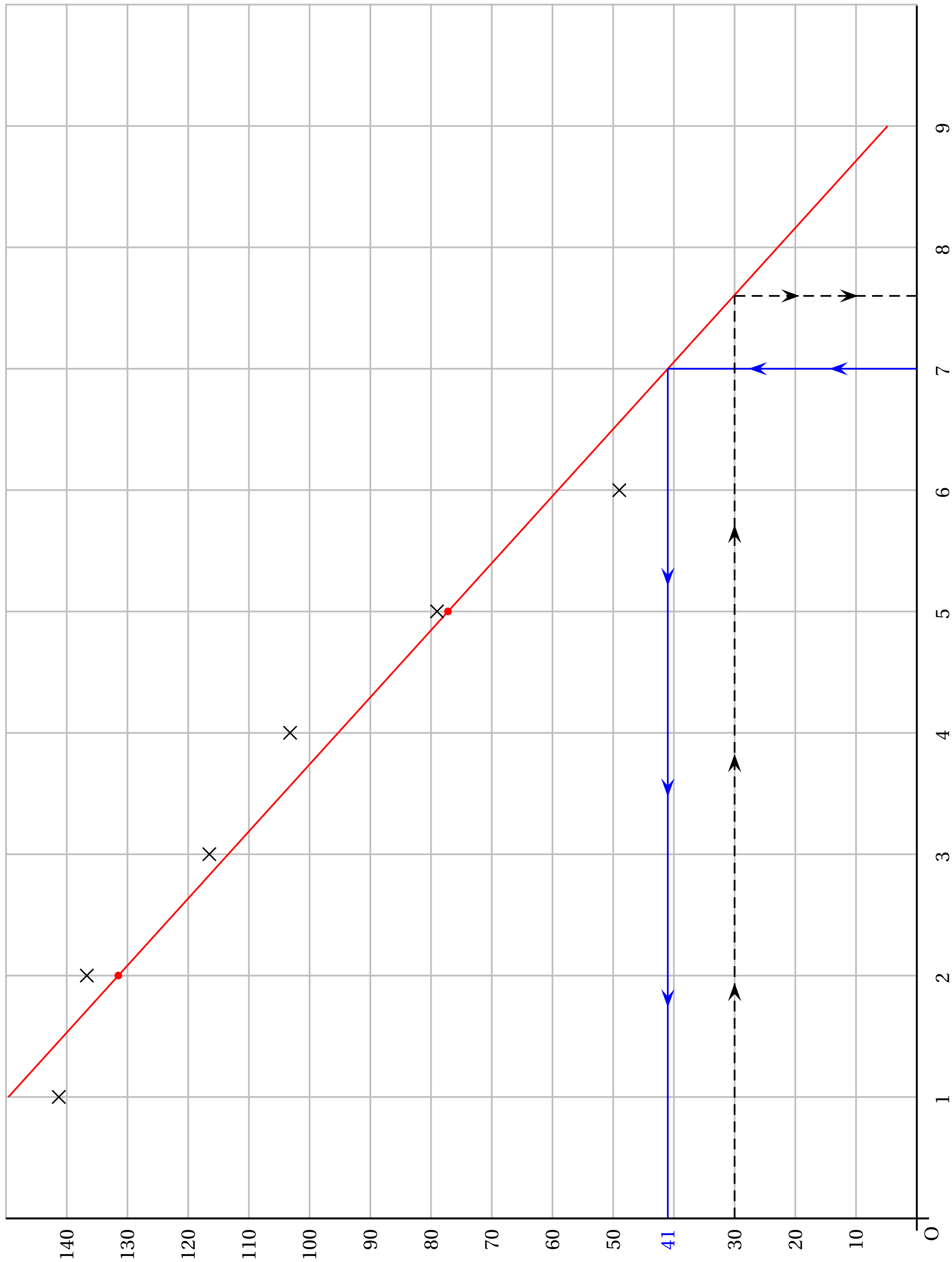
EXERCICE 1 **Statistiques à 2 variables** **8 points**

Entre 2002 et 2007, on a mesuré l'effet de la pollution sur le nombre de poissons d'une rivière.
Les résultats présentés dans le tableau suivant donnent au jour de l'ouverture de la pêche une estimation du nombre y_i de poissons, exprimé en milliers, correspondant à l'année dont le rang est x_i.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de poissons en milliers : y_i	141,3	136,7	116,5	103,2	79	49,4

1. On représente le nuage de points dans un repère orthogonal (voir page 2).
2. Le point moyen G_1 correspondant aux trois premières années a pour coordonnées :
   $x_{G_1} = \dfrac{1+2+3}{3} = 2$ et $y_{G_1} = \dfrac{141,3+136,7+116,5}{3} = \dfrac{394,5}{3} = 131,5$.
   Le point moyen G_2 correspondant aux trois dernières années a pour coordonnées :
   $x_{G_2} = \dfrac{4+5+6}{3} = 5$ et $y_{G_2} = \dfrac{103,2+79+49,4}{3} = \dfrac{231,6}{3} = 77,2$.
3. On trace la droite (G_1G_2) dans le repère (O ; I, J) (voir page 2).
4. On cherche une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$.
   Le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \dfrac{77,2 - 131,5}{5-2} = -18,1$.
   Donc l'équation de la droite s'écrit $y = -18,1x + b$.
   Cette droite passe par G_1 donc $y_{G_1} = -18,1x_{G_1} + b$, c'est-à-dire $131,5 = -18,1 \times 2 + b$ donc $b = 167,7$.
   La droite (G_1G_2) a donc pour équation $y = -18,1x + 167,7$.
5. On suppose que la droite (G_1G_2) réalise un bon ajustement du nombre de poissons en fonction du rang de l'année jusqu'en 2010.
   a. L'année 2008 correspond à $x = 7$; la population de cette rivière en 2008 est estimée à 41 000 poissons (tracé en bleu page 2).
   b. L'année à partir de laquelle cette population sera strictement inférieure à 30 000 correspond à $n = 8$ donc c'est 2009 (tracé en pointillés graphique page 2).
6. Pour déterminer l'année à partir de laquelle la population sera inférieure à 30 000 (donc 30 milliers), on résout l'inéquation $-18,1x + 167,7 < 30$:
   $-18,1x + 167,7 < 30 \iff 137,7 < 18,1x \iff \dfrac{137,7}{18,1} > x$
   $\dfrac{137,7}{18,1} \approx 7,6$ donc c'est à partir de $n = 8$ donc de 2009 que la population sera inférieure à 30 000.

Figure de l'exercice 1



EXERCICE 2 Étude d'une fonction 12 points

Partie A

Cette partie a pour objet l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,18]$ par $f(x) = 0{,}5+\ln(2x+1)$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O; I, J).

1. On appelle f' la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$
2. Si $x \in [0\,;\,18]$, alors $x \geqslant 0$ donc $2x+1 > 0$ donc $\dfrac{2}{2x+1} > 0$.
   On peut dire que $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,18]$.
3. $f(0) = 0{,}5+\ln(1) = 0{,}5$ et $f(18) = 0{,}5+\ln(37) \approx 4{,}11$.
   Sur $[0\,;\,18]$, on sait que $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
   On établit le tableau de variations de f sur $[0\,;\,18]$:

x	1		18
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0,5	$\nearrow$	$0{,}5+\ln(38)$

4. Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est égal à
   $f'(0) = \dfrac{2}{2\times 0+1} = 2$.
5. On complète le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-1} :

x	0	1	2	3	4	5	6	9	12	18
$f(x)$	0,5	1,6	2,1	2,4	2,7	2,9	3,1	3,4	3,7	4,1

6. On trace sur une feuille de papier millimétré, dans le repère orthogonal (O; I, J) la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T) (voir page 4).

Partie B

Pendant une année, une entreprise construit une quantité x de bâtiments pour l'hôtellerie ($0 \leqslant x \leqslant 18$) dont le coût de production est donné en millions d'euros par $f(x) = 0{,}5+\ln(2x+1)$.
Chaque bâtiment est vendu au prix de 400 000 € ; la recette totale en millions d'euros peut donc s'écrire sous la forme $g(x) = 0{,}4x$.

1. Le bénéfice de l'entreprise est en millions d'euros : $g(x) - f(x) = 0{,}4x - 0{,}5 - \ln(2x+1)$.
2. On trace la droite $\mathscr{D}$ représentant g dans le repère de la partie A (voir page 4).
3. **a.** En examinant le graphique :
   - on constate que l'entreprise n'est pas bénéficiaire quand elle vend 5 bâtiments car la droite des recettes est en dessous de la courbe des coûts (tracé en pointillés page 4).
   - on constate que l'entreprise est bénéficiaire quand elle vend 15 bâtiments car la droite des recettes est au dessus de la courbe des coûts (tracé en pointillés page 4).

   b. On vérifie par le calcul les deux résultats précédents :

bâtiments vendus	coût	recette	bénéfice
5	$f(5) \approx 2{,}9$	$g(5) = 0{,}4\times 5 = 2$	non
15	$f(15 \approx 3{,}9$	$g(15) = 0{,}4\times 15 = 6$	oui

4. La quantité minimale de bâtiments que l'entreprise doit vendre pour être bénéficiaire est donnée par l'abscisse du point en lequel la droite $\mathscr{D}$ passe au dessus de la courbe $\mathscr{C}$; c'est donc à partir de 9 bâtiments vendus que l'entreprise fera des bénéfices (voir graphique page 4).

Figure de l'exercice 2