

## Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015

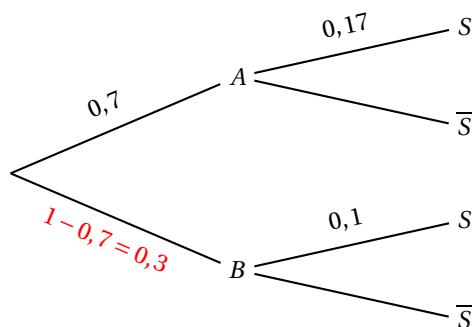
### EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A

On regroupe les données de l'énoncé dans un arbre pondéré :



1. Il suffit de lire l'énoncé :  $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$ .
2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,117 + P(B) \times P_B(S) \\ &= 0,117 + 0,3 \times 0,1 = 0,147 \end{aligned}$$

3. La probabilité cherchée correspond à  $P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,119}{0,149} \approx 0,799$ .
4. Soit  $p$  la proportion sur l'ensemble de la production de la source A de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire. La fréquence observée sur l'échantillon de taille  $n = 1000$  est  $f_{\text{obs}} = \frac{211}{1000} = 0,211$ .  
Comme  $n = 1000 \geq 30$ ,  $nf_{\text{obs}} = 211 \geq 5$  et  $n(1 - f_{\text{obs}}) = 789 \geq 5$ , les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et on peut proposer un intervalle de confiance au seuil de 95 % qui est :

$$\left[ f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,179; 0,243].$$

#### Partie B

1. Comme  $\mu = 8$  et  $\sigma = 1,6$ ,  $P(6,4 \leq X \leq 9,6) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$ .
2. À la calculatrice, on trouve :  $P(X \leq 6,5) \approx 0,174$ .
3. La question revient à résoudre l'équation en  $\sigma$  :  $P(Y \leq 6,5) = 0,1$ .  
D'après le cours, si la variable aléatoire  $Y$  suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type  $\sigma$ , alors la variable aléatoire  $Z = \frac{Y - 9}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

$$Y \leq 6,5 \iff Y - 9 \leq -2,5 \iff \frac{Y - 9}{\sigma} \leq -\frac{2,5}{\sigma} \iff Z \leq -\frac{2,5}{\sigma} \text{ donc}$$

$$P(Y \leq 6,5) = 0,1 \iff P\left(Z \leq -\frac{2,5}{\sigma}\right) \leq 0,1$$

On cherche, à la calculatrice, le réel  $\beta$  tel que  $P(Z \leq \beta) = 0,1$  sachant que  $Z$  suit la loi normale centrée réduite; on trouve  $\beta \approx -1,282$ .

$$\beta \approx -1,282 \iff -\frac{2,5}{\sigma} \approx -1,282 \iff \sigma \approx 1,95.$$

### Partie C

1. Comme  $a \cos x \geq 0$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , l'aire du domaine cherchée correspond, en unités d'aire, à la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx = a \left[ \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a(1 - (-1)) = 2a.$$

2. Le problème revient à résoudre l'équation en  $a$  :

$$2a - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \iff a - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0 \iff a(4 - \pi a) = 0.$$

Comme  $a$  est strictement positif, la seule solution possible est  $a = \frac{4}{\pi} > 0$ .

### EXERCICE 2

3 points

#### Commun à tous les candidats

1.  $f_a$  est une somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = e^{x-a} - 2$$

$$f'_a(x) > 0 \iff e^{x-a} - 2 > 0 \iff e^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$$

$f'_a(x)$  s'annule et change de signe pour  $x = a + \ln 2$  en étant négatif puis positif donc  $f_a$  admet un minimum en  $a + \ln 2$  égal à

$$f_a(a + \ln 2) = e^{a + \ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a.$$

$x$	$-\infty$	$a + \ln 2$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	0	+
$f_a$			

2. En  $a + \ln 2$ , on a  $f_a(a + \ln 2) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$ .

Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction  $\varphi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par  $\varphi(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$ .

$$\varphi'(a) = -2 + e^a;$$

$$\bullet -2 + e^a > 0 \iff e^a > 2 \iff a > \ln 2;$$

$$\bullet -2 + e^a < 0 \iff e^a < 2 \iff a < \ln 2;$$

$\varphi'(a)$  s'annule et passe de négatif à positif en  $a = \ln 2$ .

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	$\emptyset$	+
$\varphi$			

Prendre  $a = \ln 2$ , minimise donc le minimum de  $f_a$  qui est égal à  $\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + e^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$ .

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

Il suffit de prendre un contre-exemple pour montrer que  $(P_2)$  est fausse. Par exemple, le triplet  $(1; 1; 1)$  convient :  $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \geq \frac{1}{3}$  mais  $1 + 1 + 1 = 3 \neq 1$ .

**Partie B**

1. a. Il suffit de vérifier que les trois points non alignés  $B$ ,  $D$  et  $E$  appartiennent au plan d'équation  $x + y + z = 1$ .

Avec  $B(1; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$  et  $E(0; 0; 1)$ , c'est bien le cas :

$$1 + 0 + 0 = 0 + 1 + 0 = 0 + 0 + 1 = 1.$$

- b. Il suffit de montrer que le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(BDE)$ . Prenons  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{BE}$ , par exemple. On a :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$$

Donc la droite  $(AG)$  est orthogonale au plan  $(BDE)$ .

- c. D'après la question précédente, on sait que  $(AG)$  et  $(BDE)$  sont sécants en un unique point. Il suffit donc de prouver que  $K$  appartient à la droite et au plan.

— Comme  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ , le point  $K$  appartient à  $(AG)$ .

— Comme  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ , le point  $K$  appartient à  $(BDE)$ .

Donc  $K$  est l'intersection de la droite  $(AG)$  et du plan  $(BDE)$ .

2. Les côtés du triangle  $BDE$  sont les diagonales des faces du cube qui sont isométriques donc ils sont de même longueur et  $BDE$  est un triangle équilatéral.
3. a. Si  $M$  est un point du plan  $(BDE)$  distinct de  $K$ , d'après la question (??), le triangle  $AMK$  est rectangle en  $K$ . D'après le théorème de Pythagore, on a alors :

$$AM^2 = AK^2 + MK^2.$$

Si  $M = K$ , la relation est encore vraie donc elle est vraie pour tout point  $M$  de  $(BDE)$ .

- b.** Comme  $MK^2 \geq 0$ , la relation  $AM^2 \geq AK^2$  se déduit trivialement de la précédente.
- c.** Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois nombres réels vérifiant l'égalité  $x + y + z = 1$ . Le point  $M(x; y; z)$  appartient donc au plan  $(BDE)$ .  
D'après (??), on a alors  $AM^2 \geq AK^2$  qui s'écrit, avec les coordonnées :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

L'implication  $(P_1)$  est donc vraie.

## EXERCICE 4

5 points

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$1. \begin{cases} d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = 250 \\ a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = 445 \end{cases}$$

2. a. On obtient en sortie  $D = 250$  et  $A = 420$ . Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question (??).
- b. • Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable  $D$  pour le calcul de  $A$  alors qu'elle a été modifiée. On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire  $E$ , déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	$n$ et $k$ sont des entiers naturels $D$ , $A$ et $E$ sont des réels			
Entrée :	Saisir $n$			
Initialisation :	$D$ prend la valeur 300 $A$ prend la valeur 450 Saisir la valeur de $n$			
Traitement :	Pour $k$ variant de 1 à $n$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td><math>E</math> prend la valeur <math>D</math></td> </tr> <tr> <td><math>D</math> prend la valeur <math>\frac{D}{2} + 100</math></td> </tr> <tr> <td><math>A</math> prend la valeur <math>\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70</math></td> </tr> </table>	$E$ prend la valeur $D$	$D$ prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$	$A$ prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70$
$E$ prend la valeur $D$				
$D$ prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$				
$A$ prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70$				
	Fin de Pour			
Sortie :	Afficher $D$ Afficher $A$			

- On peut aussi plus simplement inverser les deux instructions d'affectation à  $A$  et à  $D$  :

Variables :	$n$ et $k$ sont des entiers naturels $D$ , $A$ sont des réels		
Entrée :	Saisir $n$		
Initialisation :	$D$ prend la valeur 300 $A$ prend la valeur 450 Saisir la valeur de $n$		
Traitement :	Pour $k$ variant de 1 à $n$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td><math>A</math> prend la valeur <math>\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70</math></td> </tr> <tr> <td><math>D</math> prend la valeur <math>\frac{D}{2} + 100</math></td> </tr> </table>	$A$ prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$	$D$ prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
$A$ prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$			
$D$ prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$			
	Fin de Pour		
Sortie :	Afficher $D$ Afficher $A$		

3. a. Par définition, on a :

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) = \frac{1}{2}e_n$$

La suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $e_0 = d_0 - 200 = 100$ .

- b. D'après la question précédente, on a  $e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

$$\text{D'où } e_n = d_n - 200 \iff d_n = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200.$$

Comme  $0 < \frac{1}{2} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 200$ .

La suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc convergente vers 200.

4. a.  $2n^2 - (n+1)^2 = ((\sqrt{2}-1)n-1)((\sqrt{2}+1)n+1)$ .

D'après les résultats de première sur les trinômes du second degré,

$2n^2 - (n+1)^2$  est donc positif pour  $n \leq -\frac{1}{\sqrt{2}+1}$  ou  $n \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \simeq 2,4$ .

Donc, pour  $n$  entier supérieur à 3, on a  $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$2n^2 \geq (n+1)^2.$$

b. *Initialisation* : pour  $n = 4$ , on a bien  $2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$  donc la propriété est initialisée.

*Hérédité* : supposons que pour tout entier  $k > 4$ ,  $2^k \geq k^2$ .

En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1} \geq 2k^2 \geq (k+1)^2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Initialisée et héréditaire, la propriété  $2^n \geq n^2$  est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4 d'après le principe de récurrence.

c. D'après la question précédente, si  $n$  est un entier supérieur ou égal à 4, on a  $0 < n^2 \leq 2^n$ . En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et en multipliant par 100, on obtient alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \implies 0 < 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$$

d. D'après la question précédente et les théorèmes d'encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$  et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 340.$$

#### EXERCICE 4

5 points

#### Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. D'après l'énoncé, le nombre d'avancés au début du mois  $n+1$  sera composé de la moitié des débutants du mois précédent passant au niveau avancé soit  $\frac{1}{2}d_n$ , de la moitié du nombre des avancés ne s'étant pas désinscrits soit  $\frac{1}{2}a_n$  et des 70 personnes qui se sont inscrites en début du mois.

On obtient bien :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$$

b. En posant  $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$ , le système s'écrit sous la forme matricielle :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

2. *Initialisation* : pour  $n = 1$ , on a bien  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I_2 + T)$ .

*Hérédité* : supposons que la relation soit vérifiée pour tout entier  $k$  non nul. En multipliant l'expression  $A^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT)$  par  $A = \frac{1}{2}(I_2 + T)$  à gauche ou à droite car  $I_2$  et  $T$  commutent, on obtient :

$$A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT) \times \frac{1}{2}(I_2 + T) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + T + kT + kT^2).$$

Or,  $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On dit qu'elle est nilpotente d'ordre 2.

Donc  $A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + (k+1)T)$  et la relation est héréditaire.

La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3. a. Comme  $\det(I_2 - A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0$ , la matrice  $I_2 - A$  est inversible et on a  $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où } C = AC + B &\iff (I_2 - A)C = B \iff C = (I_2 - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b. Il suffit de se servir des question précédentes on remarquant que

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = C = AC + B.$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C \iff V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B) \iff U_{n+1} = A(U_n - C) = AV_n.$$

c. On a  $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Par définition de } V_n, \text{ on a aussi : } U_n = A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le résultat de la question (??), on obtient, par calcul matriciel :

$$\begin{aligned} U_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. a. En admettant que pour  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2 > 0$ , en composant par la fonction inverse, décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on obtient  $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$ .

En multipliant les membres de l'inégalité par  $100n$ , on obtient, après simplification :

$$0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}.$$

b. D'après les théorèmes d'encadrement, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$ , on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

D'après les résultats sur les limites de suites géométriques de raison  $\frac{1}{2}$ , on sait aussi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Enfin, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

La fréquentation se stabilise, à long terme, autour de 200 internautes débutants et 340 internautes avancés.