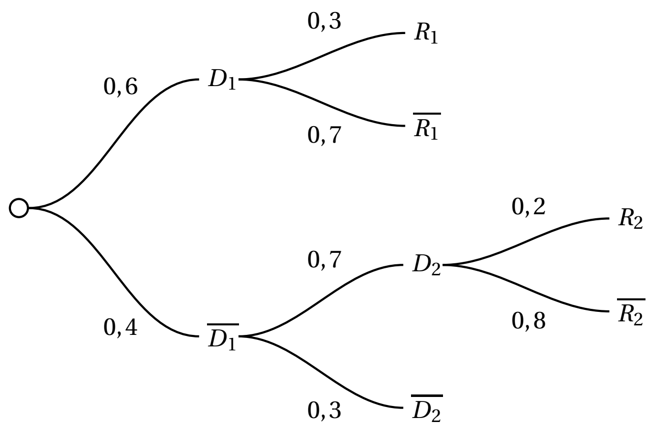
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. 

En suivant l'arbre de probabilités pondéré ci-dessus, on a $p(R_1) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$.

2. De même $p(R_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,2 = 0,056$.
Donc $p(R) = 0,18 + 0,056 = 0,236$.

3. On sait que $p_R(R_1) = \dfrac{p(R_1 \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,18}{0,236} \approx 0,7626 \approx 0,763$.

4. On a un schéma de Bernoulli avec $p = 0,236$ et $n = 5$, car 20 % de 25 représentent 5 personnes. Donc la probabilité d'avoir 5 réponses au questionnaire est :

$$\binom{25}{5} \times (0,236)^5 \times (1 - 0,236)^{20} \approx 0,179.$$

EXERCICE 2 **3 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $M = N \iff z = z^2 \iff z(1-z) = 0 \iff \begin{cases} z &= 0 \\ z &= 1. \end{cases}$

$M = P \iff z = z^3 \iff z\left(1 - z^2\right) = 0 \iff z(1+z)(1-z) = 0 \iff \begin{cases} z &= 0 \\ z &= -1 \\ z &= 1 \end{cases}.$

Conclusion si $M \in \mathscr{E}, z,\ z^2$ et z^3 sont des complexes distincts et par conséquent M, N et P aussi.

2. **a.** MNP est rectangle en P si et seulement si $MP^2 + PN^2 = MN^2 \iff$
$\left|z^3 - z\right|^2 + \left|z^2 - z^3\right|^2 = \left|z^2 - z\right|^2 \iff \left|z(1-z^2)\right|^2 + \left|z^2(1-z)\right|^2 = |z(z-1)|^2 \iff$
$|z|^2 \left|1 - z^2\right|^2 + |z|^4 |1-z|^2 = |z|^2 |1-z|^2 \iff$ (car $z \neq 0$)
$|1 - z^2|^2 + |z|^2 |1-z|^2 = |1-z|^2 \iff$ (car $z \neq 1$) $\quad |1+z|^2 + |z|^2 = 1$.

b. En reprenant l'égalité précédente : $|1+z|^2 + |z|^2 = 1 \iff$
$(1+z)(\overline{1+z}) + z\overline{z} = 1 \iff (1+z)(1+\overline{z}) + z\overline{z} = 1 \iff$

$z\overline{z}+z+\overline{z}+1+z\overline{z}=1 \iff 2z\overline{z}+z+\overline{z}=0 \iff z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \iff$ $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \iff \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$.

c. Soit C le point d'affixe $-\frac{1}{2}$. La condition précédente $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$ entraîne que $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \iff \mathrm{C}M=\frac{1}{2}$. Géométriquement M appartient au cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{2}$, M étant distinct de O et de A (qui sont sur le cercle et de B.

Conclusion : l'ensemble $\mathscr{C}$ est le cercle de centre C de rayon $\frac{1}{2}$, privé de O et de A.

3. a. On a $M(z)\in\mathscr{C}$ et $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

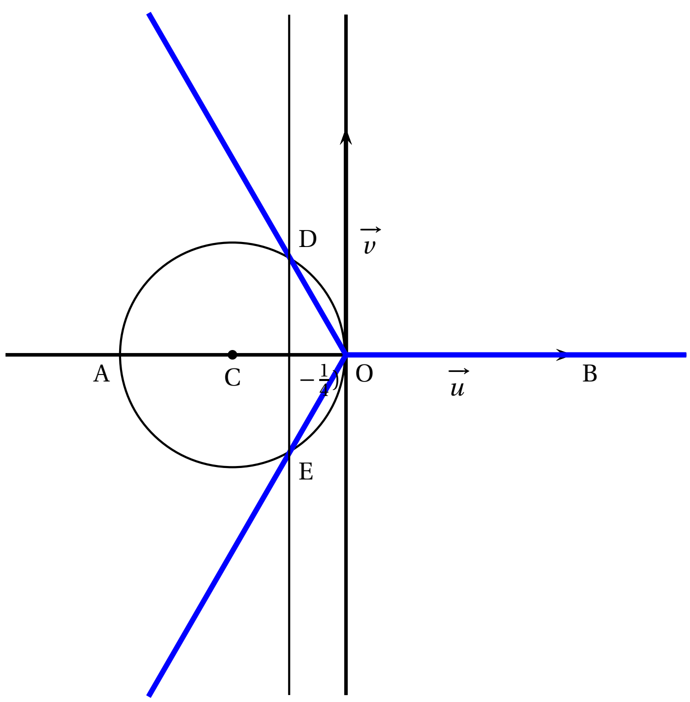
Alors $z^3>0 \iff r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\alpha}>0 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\alpha}>0 \iff \begin{cases}\cos(3\alpha) & > & 0\\ \sin(3\alpha) & = & 0\end{cases} \iff$

$\begin{cases}\cos(3\alpha) & > & 0\\ 3\alpha & = & 0 \quad [2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases}\cos(3\alpha) & > & 0\\ \alpha & = & 0 \quad [\frac{2\pi}{3}]\end{cases} \iff$

$\begin{cases}\cos(3\alpha) & > & 0\\ \alpha & = & 0 \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \text{ ou } -\frac{2\pi}{3}\end{cases} \iff \alpha=0 \text{ ou } \alpha=\frac{2\pi}{3} \text{ ou } \alpha=-\frac{2\pi}{3}$, car dans ces trois cas le cosinus est positif (et même égal à 1.)

L'ensemble $\mathscr{F}$ cherché est donc la réunion des trois demi-droites d'origine O faisant respectivement avec l'axe $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\right)$ un angle de 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$, privées du points O.

b. Figure :



c. D'après les questions **2. a.** et **2. b.** il faut que M appartiennent aux deux ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$: graphiquement on voit qu'il y a deux solutions.

il faut donc que $r>0$, $\alpha\in\left\{-\frac{2\pi}{3},\ 0,\ \frac{2\pi}{3}\right\}$ et que $|z+1|^2+|z|^2=1$.

— Si $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$, $z = r\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, $z+1 = -\dfrac{r}{2}+1+\dfrac{\mathrm{i}r\sqrt{3}}{2}$.
Donc $|z+1|^2+|z|^2 = 1 \iff \left(-\dfrac{r}{2}+1\right)^2+\dfrac{3r^2}{4}+r^2 = 1 \iff$ $2r^2-r+1 = 1 \iff 2r^2-r = 0 \iff r = \dfrac{1}{2}$. Première solution le point E d'affixe $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = -\dfrac{1}{4}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

— Si $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, le calcul de r est le même; on trouve le point D d'affixe $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = -\dfrac{1}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

— Si $\alpha = 0$, $z = r$, $|z+1|^2+|z|^2 = 1 \iff (r+1)^2+r^2 = 1 \iff 2r^2+r = 0 \iff r = -\dfrac{1}{2}$ qui n'a pas de solution. Il y a donc comme prévu deux solutions : les points D et E.

EXERCICE 2 **3 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Si $a = 2p$ et $b = 2q$, alors $N = a^2-b^2 = 4p^2-4q^2 = 4\times\ldots$ n'est pas impair ;
Si $a = 2p+1$ et $b = 2q+1$, alors $N = (2p+1)^2-(2q+1)^2 = (2p+2q+2)(2p-2q)$ n'est pas impair.
Conclusion a et b n'ont pas la même parité.

2. On a par définition de N, $a > b$. Or $N = (a+b)(a-b)$, donc est le produit de deux naturels. En posant $a+b = p$ et $a-b = q$, $N = p\times q$. D'après la question 1, a et b sont de parités contraires, donc $a+b = p$ et $a-b = q$ sont impairs et leur produit aussi.

Partie B

1. a. Les restes de X sont les naturels de 0 à 8. On calcule les restes de X^2 :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

b. On a $250\,507 = 9\times 27\,834+1$, donc $250\,507 \equiv 1 \quad$ modulo 9.
D'après la question précédente et puisque $a^2-250\,507 = b^2$, les restes modulo 9 de b^2 sont ou 0, ou 1, ou 4 ou 7.
On en déduit que les restes modulo 9 de $a^2 = 250\,507+b^2$ sont 1, 2, 5 ou 8. Mais ces trois dernières valeurs sont interdites d'après la question 1. a.
Donc le reste modulo 9 de a^2 est égal à 1.
Toujours d'après la question 1. a., on en déduit que les restes possibles de a sont 1 ou 8.

2. a. Si $(a~;~b)$ vérifie l'équation $a^2-250\,507 = b^2$, alors $a^2 = 250\,507+b^2 \geqslant 250\,507 \iff a \geqslant \sqrt{250\,507} \iff a \geqslant 501$.

b. $(501~;~b)$ solution de (E) si $501^2-250\,507 = b^2 \iff 494 = b^2$qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, car $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$.
Il n'y a pas de couple solution de la forme $(501~;~b)$.

3. a. On a $503 \equiv 8 \quad$ modulo 9 et $505 \equiv 1 \quad$ modulo 9. D'après la question précédente, on peut dire que a est congru ê 503 ou à 505 modulo 9.

b. $(505+9k\ ;\ b)$ solution de (E) si et seulement si $505^2+81k^2+9090k-250507=b^2 \iff 255025+81k^2+9090k-250507=b^2 \iff 4518+81k^2+9090k=b^2$.

Pour $k=0$, 4518 n'est pas un carré;

Pour $k=1$, $4518+81+9090=13689=117^2=b^2 \iff b=117$. Donc le couple (514 ; 117) est un couple solution.

Partie C

1. D'après la question précédente $250507=514^2-117^2=(514+117)(514-117)=631\times 397$. (Effectivement 250507 n'est pas premier.
2. 631 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 : il est premier :
   397 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 : il est premier.
   Conclusion 631 et 397 sont premiers entre eux.
3. D'après la question précédente la seule écriture primaire de 250507 est 631×397. Il n'existe pas d'autre écriture de ce nombre si ce n'est l'écriture triviale 1×250507. L'écriture précédente est donc unique.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Par définition de A_1 centre de gravité du triangle BCD, donc isobarycentre des points B, C et D : $\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AA_1}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
   Calculons $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{-AC^2+AD^2}{3}=0$, car $AC=AD$.
   Un calcul analogue montre que $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
   Conclusion : la droite (AA_1) orthogonale ê deux droites sécantes du plan (BCD) est orthogonale à ce plan.
2. La droite (AB) est perpendiculaire à (AC) et à (AD), dont est perpendiculaire au plan (ACD). Le volume du tétraèdre est donc égal à
   $V=AB\times S(ACD)=a\times\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3}{2}$.
   D'après la question précédente on peut également utiliser la hauteur AA_1 et la base (BCD) :
   $V=AA_1\times S(BCD)=AA_1\times\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}\times a\sqrt{2}=AA_1\times\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
   On a donc $a\times\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3}{2}=AA_1\times\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\iff AA_1=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
3. **a.** Le point G vérifie : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}\iff 4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
   Or on a vu que $\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$, donc $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$ qui signifie que G appartient ê la droite (AA_1) (et même que G a pour abscisse $\dfrac{3}{4}$ si le repère est (A, A_1).)
   On en déduit en prenant les normes que $AG=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
   b. I est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$.
   D'autre part $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

Donc $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| \iff 4MG = 4MI \iff MG = MI$.

Conclusion : l'ensemble des points M cherchés est le plan médiateur du segment [BC].

4. **a.** Par définition de H : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Donc $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

b. On a $HC^2 - HD^2 = \left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}\right)\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HD}\right)$.

Or $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$, mais par définition du point H, $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{GA}$.

Donc $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD} = 4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ (d'après la question précédente.

D'autre part $\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DC}$.

Conclusion : $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}$.

c. On a vu que [BA] est hauteur pour la base (ACD), donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$, donc $HC^2 - HD^2 = 0 \iff HC = HD$

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

I. Première partie

1. On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$ car $1+x>0$. La fonction f est décroissante à partir de la valeur $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$. Donc f est négative et $f(x) \leqslant 0 \iff \ln(1+x) - x \leqslant 0 \iff \ln(1+x) \leqslant x$.

D'autre part $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{(x-1)(x+1)+1}{1+x} = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$.

La fonction g est donc croissante ê partir de la valeur $g(0) = \ln 1 - 0 + \dfrac{0}{2} = 0$.

Donc g est positive et $g(x) \geqslant 0 \iff \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0 \iff$

$x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

2. Finalement, en regroupant les deux inégalités pour $x \geqslant 0$,

$x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie

1. *Initialisation* : $u_1 = \dfrac{3}{2} > 0$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et supposons que $u_n > 0$; alors

$u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ car les deux facteurs sont supérieurs à zéro.

La relation est vraie au rang 1 et si elle vraie au rang n au moins égal à 1, elle est vraie au rang $n+1$. On a donc démontré par récurrence que $u_n > 0$ si $n > 0$.

2. *Initialisation* : $u_1 = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^1}\right) = \ln\dfrac{3}{2}$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et supposons que

$\ln u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$; alors par définition de la suite :

$\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) =$

$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.
La relation est vraie au rang 1 et si elle vraie au rang n au moins égal à 1, elle est vraie au rang $n+1$. On a donc démontré par récurrence que $n>0$, $\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

3. Quel que soit le naturel $n>0$, $\frac{1}{2^n}, >0$; on peut donc utiliser l'encadrement démontré dans la première partie :

$$\begin{array}{lcccc}
\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} & \leqslant & \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) & \leqslant & \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2} & \leqslant & \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) & \leqslant & \frac{1}{2^2}\\
\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^3} & \leqslant & \ln\left(1+\frac{1}{2^3}\right) & \leqslant & \frac{1}{2^3}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n} & \leqslant & \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) & \leqslant & \frac{1}{2^n}
\end{array}$$

Tous les termes sont positifs : on peut donc ajouter ces inégalités membres à membres pour obtenir :

$$S_n-\frac{1}{2}T_n\leqslant \ln u_n\leqslant S_n.$$

4. S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.
$S_n=1-\frac{1}{2^n}$.
De même T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$.
$T_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$.
Comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont compris entre -1 et 1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}=0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{3}$.

5. **a.** On a démontré que si $n>0$, alors $u_n>0$. On peut donc écrire que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1$.
On a donc pour tout $n>0$, $u_{n+1}>u_n$: la suite $(u_n)_{n>0}$ est strictement croissante.

b. On a démontré que $\ln u_n\leqslant S_n \iff u_n\leqslant \mathrm{e}^{S_n}$ (par croissance de la fonction exponentielle.)
Mais S_n est majorée par 1 ; donc $u_n\leqslant \mathrm{e}^1$ ou $u_n\leqslant \mathrm{e}$.
Conclusion : la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante et majorée : elle est donc convergente vers une limite ℓ.

c. Cette limite est positive comme tous les termes de la suite ; d'autre part par continuité de la fonction ln, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=\ln\ell$.
À partir de l'encadrement de $\ln u_n$ démontré ê la question 3, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n-\frac{1}{2}T_n\right)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\ln u_n\leqslant\lim_{n\to+\infty}S_n$$

c'est-à-dire : $1 - \dfrac{1}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1 \iff \dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$.
Finalement, on obtient l'encadrement :

$$\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}.$$