∽ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 9 juin 2021 ∾

Candidats libres Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^{-2x}$.
   On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
   Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

   a. $(1-2x)\text{e}^{-2x}$ **b.** $4(x-1)\text{e}^{-2x}$ **c.** 4e^{-2x} **d.** $(x+2)\text{e}^{-2x}$

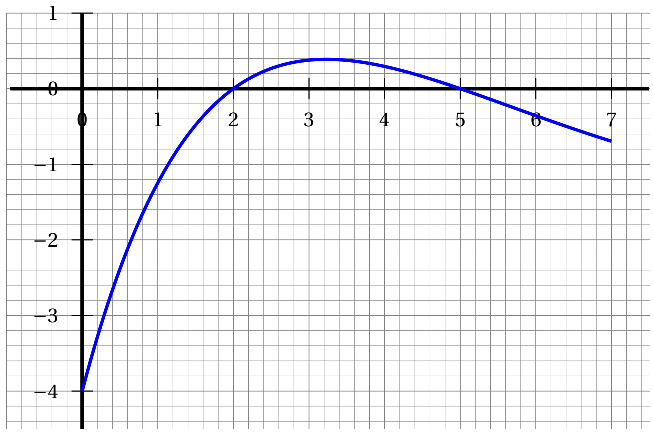
   $f(x) = x\text{e}^{-2x}$ donc $f'(x) = \text{e}^{-2x} + x \times (-2)\text{e}^{-2x} = (1-2x)\,\text{e}^{-2x}$ et donc
   $f''(x) = -2\text{e}^{-2x} + (1-2x) \times (-2)\text{e}^{-2x} = (-2-2+4x)\,\text{e}^{-2x} = 4\,(x-1)\,\text{e}^{-2x}$
   Réponse b.

2. Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées.
   Le nombre de combinaisons possibles est :

   a. 1 728 **b.** 1 320 **c.** 220 **d.** 33

   $$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$
   Réponse c.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;\,7]$.



   Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ est :

a.

x	0		$3,25$		7
$f(x)$		↗		↘	

b.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↘		↗		↘	

c.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↗		↘		↗	

d.

x	0		2		7
$f(x)$		↗		↘	

f' est négative ou nulle sur $[0~,~2]$ donc la fonction f est décroissante sur $[0~,~2]$.
f' est positive ou nulle sur $[2~,~5]$ donc la fonction f est croissante sur $[2~,~5]$.
f' est négative ou nulle sur $[5~,~7]$ donc la fonction f est décroissante sur $[5~,~7]$.
Réponse b.

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B. Une étude statistique montre que 2,8 % des puces ont le défaut A, 2,2 % des puces ont le défaut B et, heureusement, 95,4 % des puces n'ont aucun des deux défauts.

La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :

a. 0,05 **b.** 0,004 **c.** 0,046 **d.** On ne peut pas le savoir

On appelle A l'événement « la puce a le défaut A » et B l'événement « la puce a le défaut B ».
D'après le texte, on a : $P(A) = 0,028$ et $P(B) = 0,022$.
On cherche la probabilité qu'une puce ait les deux défauts, c'est-à-dire $P(A \cap B)$.
On sait que $95,4\,\%$ des puces n'ont aucun des deux défauts donc il y a $100 - 95,4 = 4,6\,\%$ des puces qui ont au moins un des deux défauts, donc $P(A \cup B) = 0,046$.
Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,028 + 0,022 - 0,046 = 0,004$
Réponse b.

5. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

D'après ce tableau de variation :

a. f' est positive sur $\mathbb{R}$.

b. f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$.

c. f' est négative sur $\mathbb{R}$.

d. f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$.

> La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ donc f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$.
> **Réponse b.**

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

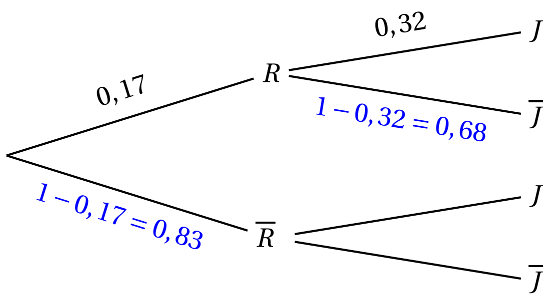
Partie A

On interroge une personne au hasard et on note :

— R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».

— J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. On représente la situation à l'aide de cet arbre pondéré :



2. $P(R\cap J) = 0,17\times 0,32 = 0,0544$

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française, donc $P(J) = 0,11$.
La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P\left(\overline{R}\cap J\right)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(J) = P(R\cap J) + P\left(\overline{R}\cap J\right)$ donc $P\left(\overline{R}\cap J\right) = P(J) - P(R\cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$ soit $0,056$ à 10^{-3} près.

4. $P_{\overline{R}}(J) = \dfrac{P\left(\overline{R}\cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ $6,75\,\%$.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1.
   - On interroge une personne au hasard et il n'y a que deux possibilités : elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$.
   - On réalise $n = 50$ fois ce questionnement de façon identique.

   Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.
2. $P(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times (1 - 0,17)^{50-5} \approx 0,069$

   Il y a donc une probabilité de 0,069 que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

   Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X < 13) \geqslant 0,95$.

   Or $P(X < 13) = P(X \leqslant 12) \approx 0,929 < 0,95$ donc cette affirmation est fausse.
4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85 ; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

a. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
$= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$

• $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

b. On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

c. Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier n tel que $a_n > 2500$; on résout cette inéquation :

$a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n \iff \dfrac{500}{2800} > 0,85^n$

$\iff \ln\left(\dfrac{500}{2800}\right) > \ln(0;85^n) \iff \ln\left(\dfrac{5}{28}\right) > n \times \ln(0;85) \iff \dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} < n$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11.

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,,\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ sur $[0\,,\,+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. a. Soit $\mathscr{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

• **Initialisation**

$u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$

$0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sur $[0\,;\,4[$, donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.

$f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b.
- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$; or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT — 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

A(2 ; −1 ; 0), B(3 ; −1 ; 2), C(0 ; 4 ; 1) et S(0 ; 1 ; 4).

1. $\overrightarrow{\text{AB}} : \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}} : \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$. Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. **a.** Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{AB}}$
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$, donc il est orthogonal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $2x + 1y + (-1)z + d = 0$ soit $2x + y - z = d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$\text{A} \in (\text{ABC})$ donc $2x_{\text{A}} + y_{\text{A}} - z_{\text{A}} + d = 0$, c'est-à-dire $4 - 1 + 0 + d = 0$, donc $d = -3$.

Le plan (ABC) a pour équation : $2x + y - z - 3 = 0$.

c. $2x_S + y_S - z_S - 3 = 0+1-4-3 = -6 \neq 0$ donc $S \notin$ (ABC) donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. De plus elle contient le point S (0 ; 1 ; 4).
Donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& 0 &+& 2\times t\\ y &=& 1 &+& 1\times t\\ z &=& 4 &+& (-1)\times t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{soit} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 4-t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

b. Le point H est l'intersection de la droite (d) et du plan (ABC), donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 4-t\\ 2x+y-z-3 &=& 0\end{array}\right.$$

Donc : $2(2t)+(1+t)-(4-t)-3=0$, c'est-à-dire $4t+1+t-4+t-3=0$ soit $t=1$.

Pour $t=1$, on aura $x=2\times 1=2$, $y=1+1=2$ et $z=4-1=3$.

Les coordonnées du point H sont donc (2 ; 2 ; 3).

4. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est $\mathcal{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

- La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire vaut $\mathscr{A} = \dfrac{\text{AB}\times\text{AC}}{2}$.
  $\text{AB}^2 = 2^2+0^2+2^2 = 5$ donc $\text{AB} = \sqrt{5}$
  $\text{AC}^2 = (-2)^2+5^2+1^2 = 30$ donc $\text{AC} = \sqrt{30}$
  $\mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{30}}{2} = \dfrac{\sqrt{150}}{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$
- La hauteur est SH.
  $\text{SH}^2 = (2-0)^2+(2-1)^2+3-4)^2 = 6$ donc $\text{SH} = \sqrt{6}$
- $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}\times\text{SH} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6} = 5$

5. **a.** $\overrightarrow{\text{SA}} : \begin{pmatrix}2-0\\-1-1\\0-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ donc $\text{SA}^2 = 2^2+(-2)^2+(-4)^2 = 24$ donc $\text{SA} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b. On indique que $\text{SB} = \sqrt{17}$.

$\overrightarrow{\text{SB}} : \begin{pmatrix}3-0\\1-(-1)\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{SA}}\cdot\overrightarrow{\text{SB}} = 2\times 2+(-2)\times(-2)+(-4)\times(-2) = 18$

Or $\overrightarrow{\text{SA}}\cdot\overrightarrow{\text{SB}} = \text{SA}\times\text{SB}\times\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$

Donc $18 = 2\sqrt{6}\times\sqrt{17}\times\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right) = \dfrac{18}{2\sqrt{6}\times\sqrt{17}} = \dfrac{9}{\sqrt{102}}$

On en déduit que $\widehat{\text{ASB}} \approx 27{,}0°$.

EXERCICE B - Équations différentielles

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \dfrac{2}{3}x - 2$.

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
$g'(x) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \dfrac{2}{3}$
2. $g'(x) = \dfrac{2}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}\right)$
$g'(x) > 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} \iff \ln(1) > \dfrac{-1}{3}x \iff 0 > \dfrac{-1}{3}x \iff x < 0$
$g(0) = 2\mathrm{e}^0 - 0 - 2 = 0$
On en déduit les variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

3. D'après le tableau de variations de g, on a : $g(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.

Partie B

1. On considère l'équation différentielle $\quad (E) : \quad 3y' + y = 0.$
$(E) \iff y' + \dfrac{1}{3}y = 0$ qui a pour solutions d'après le cours, les fonctions h définies par $h(x) = C \times \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
2. La solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point M$(0\,;2)$ vérifie $h(0) = 2$, c'est-à-dire $C\mathrm{e}^0 = 2$, donc $C = 2$.
La solution particulière cherchée est la fonction h définie par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   a. La tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M$(0\,;2)$ a pour équation : $y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$
   $f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$ donc $f(0) = 2$
   $f'(x) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$ donc $f'(0) = -\dfrac{2}{3}$
   (Δ_0) a donc pour équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$.
   b. Pour étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0), on étudie le signe de $f(x) - \left(-\dfrac{2}{3}x + 2\right)$,.
   $f(x) - \left(-\dfrac{2}{3}x + 2\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \dfrac{2}{3}x - 2 = g(x)$; on sait d'après la partie A, que $g(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours en dessous de la tangente Δ_0.

Partie C

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.
La tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$ c'est-à-dire $y = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}\,(x-a) + 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}$.

Elle coupe l'axe des abscisses en un point P dont l'abscisse est solution de l'équation

$-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}(x-a)+2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}=0$. On résout cette équation :

$$-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}(x-a)+2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}=0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}(x-a) \iff \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}}{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}}=x-a$$

$$\iff 3=x-a \iff x=a+3$$

Donc (Δ_a) coupe l'axe des abscisses en un point P de coordonnées $(a+3\ ;\ 0)$.

2. La tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2 coupe l'axe des abscisses au point P de coordonnées $(-2+3\ ;\ 0)$ soit $(1\ ;\ 0)$.

La tangente (Δ_{-2}) est donc la droite (BP).