∽ Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers juin 2006 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Questionnaire à choix multiples

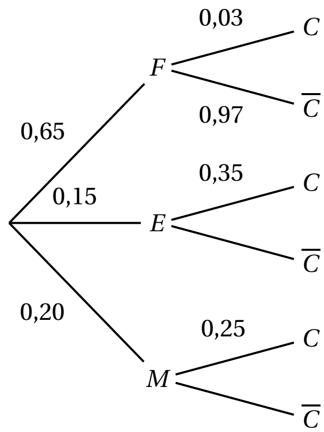
1. Sur l'intervalle $]-5\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$ admet une seule solution entre 0 et 2.
2. Sur l'intervalle $]-5\ ;\ +\infty[$ la courbe $\mathcal{C}$: exactement deux asymptotes, les droites d'équations
   $y = -4,5$ et
   $x = -5$.
3. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, soit $y - 4 = 0(x-2) \iff y = 4$.
4. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :
   $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ ou $y - 2 = f'(1)(x-1) \iff y = xf'(1) + 2 - f'(1)$.
   Par identification on a donc :
   $f'(1) = 3$.
5. Sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ la fonction exponentielle est croissante et la fonction f est décroissante, donc par composition la fonction g est décroissante.
6. Sur $]2\ ;\ +\infty[$, $-4,5 \leqslant f(x) \leqslant 5$, donc $0,5 \leqslant f(x) + 5 \leqslant 9$, donc la fonction h est bien définie.
   Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4,5$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ln 0,5 \approx -0,69$, donc n'est pas positive.
   Enfin sur $]2\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)+5}$.
   Or d'après le tableau de variations sur $]2\ ;\ +\infty[$, $f'(x) < 0$ (puisque f décroit) et on a vu que $f(x) + 5 > 0$; donc $h'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} p(F) + p(M) & = & 0,85 \\ p(E) + p(M) & = & 0,35 \\ p(F) + p(E) + p(M) & = & 1 \end{array}\right.$$
   En sommant les deux premières équations on a : $p(F) + p(M) + p(E) + p(M) = 1,15 \iff 1 + p(M) = 1,20$, soit $p(M) = 0,20$.
   D'où de la première équation : $p(F) = 0,85 - 0,20 = 0,65$ et de la deuxième : $p(E) = 0,35 - 0,20 = 0,15$.

   b. Le prix de vente moyen d'un billet est :
   $0,65 \times 5 + 0,15 \times 3 + 0,20 \times 6 = 3,25 + 0,45 + 1,20 = 4,90$ €.
2. On a l'arbre pondéré suivant :



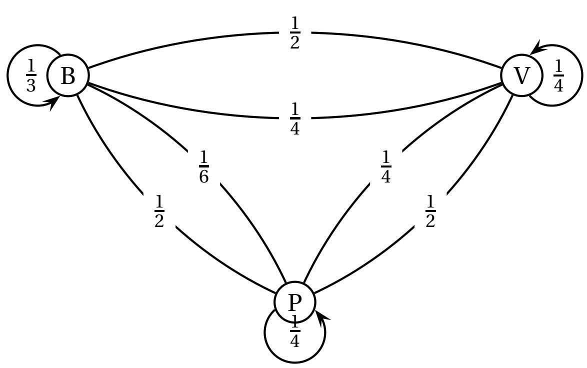
D'après la formule des probabilités totales :
$p(C) = p(F\cap C)+p(E\cap C)+p(M\cap C) = 0,65\times 0,03+0,15\times 0,35+0,20\times 0,25 = 0,0195+0,0525+0,05 = 0,122$.

3. Il faut calculer $p_C(F) = \dfrac{p(F\cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,0195}{0,122} \approx 0,160$.

4. On a trois épreuves de Bernouilli. La loi de probabilité associée au nombre de visiteurs ayant acheté le catalogue est une loi de paramètres $n = 3$ et $p = 0,122$.
La probabilité que trois visiteurs aient acheté le catalogue est égale à $0,122^3$.
Donc la probabilité qu'au moins un visiteur n'ait pas acheté le catalogue est égale à $1-0,122^3 \approx 0,998$.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité

1. a.
- $p_B(B) = v$; ${}_B(P) = \dfrac{1}{6}$; $p_B(V) = 1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.
- $p_V(V) = \dfrac{1}{4}$; $p_V(P) = \dfrac{1}{2}$; $p_V(B) = 1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.
- $p_P(P) = \dfrac{1}{4}$; $p_P(B) = \dfrac{1}{2}$; $p_P(V) = 1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. D'où le graphe :



b.

c. L'état probabiliste dans deux jours est représenté par la matrice ligne $P_2 = P_0 \times M^2$ soit

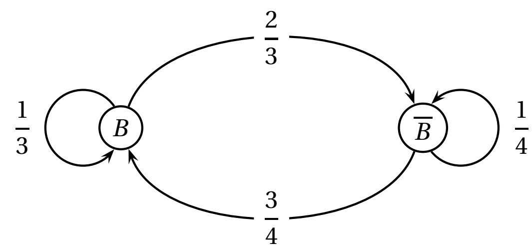
$$P_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{23}{72} & \frac{1}{3} & \frac{25}{72}\\ \frac{19}{48} & \frac{5}{16} & \frac{7}{24}\\ \frac{17}{48} & \frac{3}{8} & \frac{13}{48}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{23}{72} & \frac{1}{3} & \frac{25}{72}\end{pmatrix}.$$

La probabilité qu'il fasse beau dans deux jours est $\dfrac{23}{72}$.

La probabilité qu'il pleuve dans deux jours est $\dfrac{25}{72}$.

La probabilité que le temps soit variable dans deux jours est $\dfrac{1}{3}$.

2. Dans une autre région, on note B : « il fait beau » $\overline{B}$: « il ne fait pas beau ».
Les variations du temps sont représentées par le graphe suivant :



a. La matrice de transition T de ce graphe est $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

b. Soit $Q = (x\ y)$ avec $x + y = 1$.

$Q = QT \iff \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y & \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y\\ y & = & \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y\end{array}\right.$

Or $x + y = 1$, donc $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y\\ x & = & 1 - y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y\\ x = 1 - y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{9}{8}y\\ x = 1 - y\end{array}\right. \Rightarrow$

$\dfrac{9}{8}y = 1 - y \iff \dfrac{17}{8}y = 1 \iff y = \dfrac{8}{17}$ et par suite $x = \dfrac{9}{17}$.

La matrice $Q = \begin{pmatrix}\frac{9}{17} & \frac{8}{17}\end{pmatrix}$ est l'état stable du système.

Donc $p(B) = \dfrac{9}{17}$ et $p\left(\overline{B}\right) = \dfrac{8}{17}$

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

$$f(x) = 1 - x + 2\ln x.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} 1 - x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc pa r somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

2. Sur $[0\,;\,5]$, $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{-x+2}{x}$.

Comme $x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x+2$. D'où :

- si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $\quad f'(x) \geqslant 0$: la fonction f est croissante sur $[0\,;\,2]$;
- si $2 \leqslant x \leqslant 5$, $\quad f'(x) \leqslant 0$: la fonction f est décroissante sur $[2\,;\,5]$;
- $f'(2) = 0$; $f(2) = 1 - 2 + 2\ln 2 = 2\ln 2 - 1$ est le maximum de f sur $[0\,;\,5]$.

D'où le tableau de variations :

x	0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 1$	$\searrow$	$2\ln 5 - 4$

3. a. $f(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$.

b. Sur l'intervalle $[3\,;\,4]$, $\quad f$ est décroissante de $f(3) = 2\ln 3 - 2 \approx 0,197$ à $f(4) = 2\ln 4 - 3 \approx -0,227$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc une fois sur l'intervalle $[3\,;\,4]$ en $\alpha \in [3\ ;\ 4]$ tel que que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(3,5) \approx 0,006$ et $f(3,6) \approx -0,04$, donc $3,5 < \alpha < 3,6$.

$f(3,51) \approx 0,001$ et$f(3,52) \approx -0,003$, donc $3,51 < \alpha < 3,52$.

Par défaut : $\alpha \approx 3,51$.

c. On en déduit que :

- sur $[0\,;\,1[$, $\quad f(x) < 0$;
- sur $[0\ ;\ \alpha[$, $\quad f(x) > 0$;
- sur $]\alpha\ ;\ 5]$, $\quad f(x) < 0$.

$$g(x) = x\left(-\frac{1}{2}x + 2\ln x - 1\right).$$

4. a. g est dérivable sur $]0\,;\,5]$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2\ln x - 1 + x\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x}\right) = -\dfrac{1}{2}x + 2\ln x - 1 - \dfrac{1}{2}x + 2 = 1 - x + 2\ln x = f(x)$.

Donc g est une primitive de f sur $]0\,;\,5]$.

b. La fonction étant positive, on sait que l'aire du domaine est égale en unité d'aire à l'intégrale de la fonction f entre $x = 1$ et $x = \alpha$, valeurs qui annulent f.

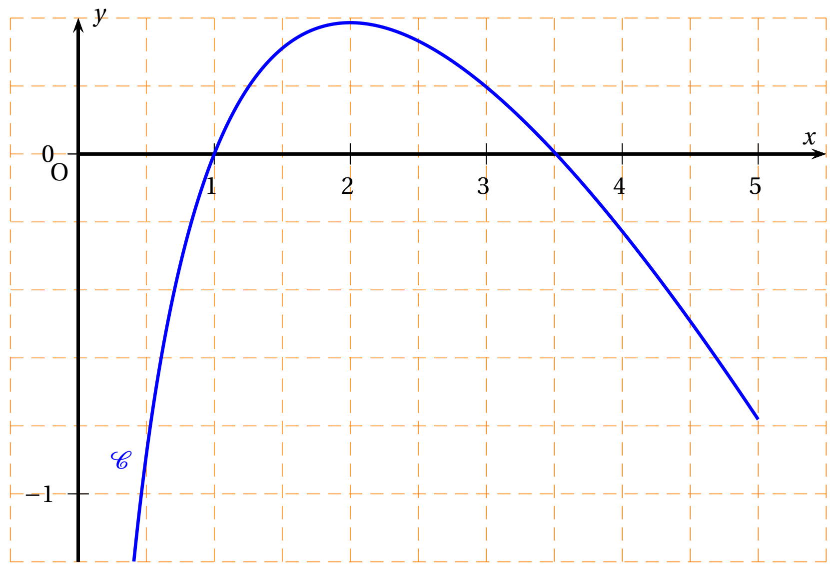
On a donc : $\displaystyle\int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_1^{\alpha} = g(\alpha) - g(1)$.

c. On a $\mathscr{A} = g(\alpha) - g(1) = \alpha\left(-\dfrac{1}{2}\alpha + 2\ln\alpha - 1\right) - 1\left(-\dfrac{1}{2} + 2\ln 1 - 1\right) = -\dfrac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha\ln\alpha - \alpha + \dfrac{3}{2}$.

Avec $\alpha \approx 3,51$, on obtient $\mathscr{A} \approx 0,644$ unité d'aire.

Or une unité d'aire est égale à $2 \times 5 = 10$ cm^2.

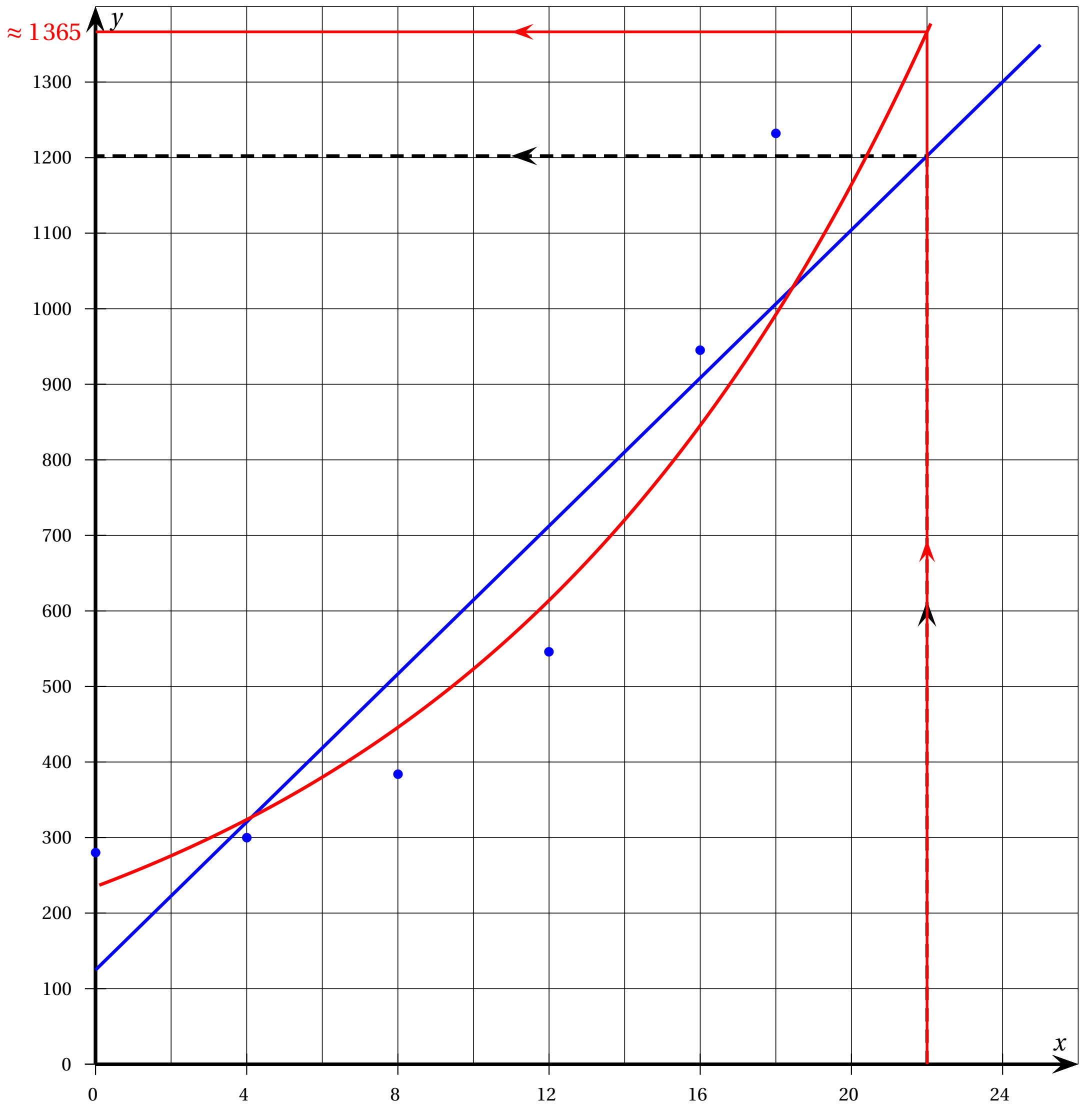
Finalement $\mathscr{A} \approx 6,44$ cm^2.



EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 1 cm pour deux années sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 100 milliards de dollars sur l'axe des ordonnées.



2. **a.** La calculatrice livre $y = 48,98x + 124,71$ comme équation de la droite d'ajustement de y en x, coefficients arrondis au centième.

   b. Voir la figure.

   c. Voir le tracé sur le graphique.
   Par le calcul, on a $y = 48,98 \times 22 + 24,71 = 1\,202,27$.

3. **a.** On a $z = 0,08x + 5,46 \ln y \iff y = \mathrm{e}^{0,08x+5,46} \iff y = \mathrm{e}^{0,08x} \times \mathrm{e}^{5,46}$.
   Or $\mathrm{e}^{5,46} \approx 235,097 \approx 235,1$, donc finalement : $y \approx 235,1\mathrm{e}^{0,08x}$.

   b. Voir le graphique.

   c. Voir le tracé sur le graphique.
   Par le calcul : avec $x = 22$, on obtient : $y \approx 235,1 \times \mathrm{e}^{0,08\times 22} \approx 1\,366,5$.

4. • Avec l'ajustement affine l'erreur est égale à $\dfrac{1\,650 - 1\,202,27}{1\,650} \times 100 \approx 27,1\,\%$.

   • Avec l'ajustement exponentiel l'erreur est égale à $\dfrac{1\,650 - 1\,366,5}{1\,650} \times 100 \approx 17,2\,\%$.

Annexe – Document réponse à rendre avec la copie

Exercice 1 - Commun à tous les candidats

Ne cocher qu'une seule réponse par question

1. Sur l'intervalle $]-5\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$
☒ admet une seule solution
☐ admet deux solutions
☐ admet quatre solutions.

2. Sur l'intervalle $]-5\ ;\ +\infty[$ la courbe $\mathscr{C}$:
☐ admet une seule asymptote la droite d'équation $x = -5$
☒ admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $x = -4,5$ et $y = -5$
☐ admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $y = -4,5$ et $x = -5$.

3. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
☒ $y = 4$
☐ $y = 4(x-2)$
☐ $x = 4$.

4. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;\,2)$ est $y = 3x - 1$. On a :
☐ $f(2) = 1$
☐ $f'(1) = -1$
☒ $f'(1) = 3$.

5. Sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$, la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-f(x)}$
☐ est croissante
☒ est décroissante
☐ n'est pas monotone.

6. On pose $h(x) = \ln[f(x) + 5]$. Alors la fonction h :
☒ est décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$;
☐ est positive sur $]2\ ;\ +\infty[$;
☐ n'est pas définie sur $]2\ ;\ +\infty[$.