Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers 12 juin 2014

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,150 **c.** 0,462 **d.** 0,700

Avec des notations évidentes : $p_B(F) = \dfrac{p(B\cap F)}{p(B)}$.

Or $p(B) = p(B\cap F) + p(B\cap H) = 0,75\times\frac{1}{5} + 0,25\times\frac{7}{10} = 0,15 + 0,175 = 0,325$.

D'où $p_B(F) = \dfrac{0,15}{0,325} = \dfrac{150}{325} = \dfrac{6}{13} \approx 0,462$.

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à $0,3$. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 **b.** 0,092 **c.** 0,002 **d.** 0,267

On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

On a donc $p(X = 3) = \binom{10}{3}0,3^3\times(1-0,3)^{10-3} = 120\times 0,027\times 0,823543 \approx 0,2668 \approx 0,267$.

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528

On a $p(X \geqslant 6) = 1 - \displaystyle\int_0^6 \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\right]_0^6 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\times 6} \approx 0,4723 \approx 0,472$.

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g.

La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$.
La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16 **b.** 0,32 **c.** 0,84 **d.** 0,48

On sait que si X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(200\,;\,\sigma^2\right)$, alors
$p(200-2\sigma \leqslant X \leqslant 200+2\sigma) = 0,954$. On en déduit que $2\sigma = 16 \iff \sigma = 8$.
On a donc $p(X \leqslant 192) = 0,5 - p(192 \leqslant X \leqslant 200) \approx 0,16$.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. a. $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_0 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} \times 16 = 8+8\mathrm{i}$.
$z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_1 = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)(8+8\mathrm{i}) = 4+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}-4 = 8\mathrm{i}$.
$z_3 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_2 = 8\mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right) = 4\mathrm{i}-4 = -4+4\mathrm{i}$.

b. Voir l'annexe.

c. Si $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ alors $|z|^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, donc $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
Un argument de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ est donc $\frac{\pi}{4}$.

d. $\mathrm{O}A_0 = ||z_0| = r_0 = 16$;
$\mathrm{O}A_1 = ||z_1| = r_1 = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{64\times 2} = 8\sqrt{2}$;
$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8+8\mathrm{i}-16| = |-8+8\mathrm{i}| = 8\sqrt{2}$.
On a donc $\mathrm{O}A_1 = A_0A_1$: le triangle est isocèle en A_1 ;
D'autre part $\left(8\sqrt{2}\right)^2+\left(8\sqrt{2}\right)^2 = 16^2 \iff A_0A_1^2+\mathrm{O}A_1^2 = \mathrm{O}A_0^2$ signifie (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est rectangle en A_1.

2. $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n\right| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n|$ (le module du produit est égal au produit des modules) $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}r_n$.
$r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r_n$ montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que $r_n r_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Comme $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

La suite converge vers 0.

Comme $r_n = |z_n| = \mathrm{O}A_n$, ceci signifie géométriquement que la limite des points A_n est le point O.

3. a. Quel que soit le naturel n :

$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n - z_n\right| = \left|z_n\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2} - 1\right)\right| = \left|z_n\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right)\right| = \left|\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n = r_{n+1}$.

b. L_n est donc la somme des n (sauf r_0) premiers termes de la suite géométrique (r_n).

Donc $L_n = 8\sqrt{2}\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{8\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{16}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 16\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a.
- $f_1(0) = 0$: évident ;
- $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;
- f_1 fonction polynôme est dérivable sur $[0\,;\,1]$ donc continue sur cet intervalle ;
- $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 3(2x-1)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$ et f_1 est croissante sur cet intervalle.

f_1 est donc bien une fonction de retouche.

b. Il semble que la courbe coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = 0$ et $x = 0,5$.

On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.

On a donc $f_1(x) \leqslant x \iff x \geqslant 0,5$ o u $x = 0$.

Ce résultat signifie que f_1 éclaircit les nuances codées par un nombre supérieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0 (exclu) et 0,5.

2. a. f_2 est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc g l'est aussi et :

$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.

b. Comme $\mathrm{e} > 1$, le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de son numérateur ; or

$\mathrm{e}-2-(\mathrm{e}-1)x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}-2 \geqslant (\mathrm{e}-1)x \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \geqslant x$

On a $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \approx 0,418$.

On a donc avec $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} = a$,

$g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant a$ et de même

$g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant a$.

La fonction g est donc croissante sur $[0\,; a]$, puis décroissante sur $[a\,;\ 1]$.

g a donc un maximum $g(a) \approx 0,12$.

c. D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\ a]$ la fonction g est continue et croissante de $g(0) = 0$ à $g(a) \approx 0,12$.

Comme $0,05 \in [0\,;\ a]$, il existe une valeur unique α de $[0\,;\ a]$ telle que $f(\alpha) = 0,05$.

On démontre de même (avec g décroissante) que sur $[a\,;\ 1]$ il existe un réel unique β tel que $g(\beta) = 0,05$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

1. Cet algorithme calcule le nombre de nuances par palier de 0,01 pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.
2. On applique l'algorithme à la fonction $g = f_2 - x$. Il calcule toutes valeurs telles que $g(x) \geqslant 0,05$.

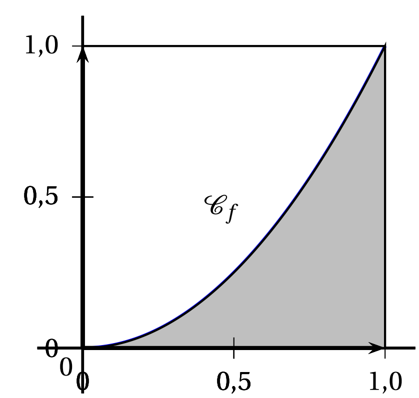
   Ce sont d'après la question précédente toutes les nuances comprises entre 0,09 et 0,85 : l'algorithme doit donc retourner : $c = 85 - 9 + 1 = 77$.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_3(x) = x\mathrm{e}^{(x^2-1)} \qquad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. **a.** f_3 produit de fonctions positives sur $[0;1]$ est positive sur cet intervalle. On a donc :
$\mathscr{A}_{f_3} = \displaystyle\int_0^1 x\text{e}^{\left(x^2-1\right)}\,\text{d}x = \frac{1}{2}\left[\text{e}^{\left(x^2-1\right)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-1}\right).$

   b. On a $f_4(0) = -15+15 = 0$ et comme il est admis qu'elle est une fonction de retouche elle est croissante sur $[0;1]$, donc positive sur cet intervalle. On a donc :
$\mathscr{A}_{f_4} = \displaystyle\int_0^1 \left(4x-15+\frac{60}{x+4}\right)\,\text{d}x = \left[2x^2-15x+60\ln(x+4)\right]_0^1 =$
$2-15+60\ln 5-60\ln 4 = -13+60\ln\frac{5}{4}.$

2. On a $\mathscr{A}_{f_3} = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-1}\right) \approx 0,316$ et $\mathscr{A}_{f_2} = -13+60\ln\frac{5}{4} \approx 0,389$.
C'est la fonction f_4 qui éclaircit le plus l'image.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$\text{A}(1~;~2~;~7),\quad \text{B}(2~;~0~;~2),\quad \text{C}(3~;~1~;~3),\quad \text{D}(3~;~-6~;~1) \text{ et } \text{E}(4~;~-8~;~-4).$$

1. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** $\overrightarrow{u}(1~;~b~;~c)$ un vecteur normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 1-2b-5c = 0$; et
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 2-b-4c = 0$.
Il faut donc résoudre le système :
$\begin{cases} 1-2b-5c &= 0\\ 2-b-4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2b-5c &= 0\\ -4+2b+8c &= 0\end{cases} \Rightarrow -3+3c = 0 \iff c = 1$; en remplaçant dans la deuxième équation on a $b = 2-4c = 2-4 = -2$.

   b. On sait que si $\overrightarrow{u}(1~;~-2~;~1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), une équation de ce plan est : $M(x~;~y~;~z) \in (\text{ABC}) \iff x-2y+z+d = 0$.
Or $\text{A}(1~;~2~;~7) \in (\text{ABC}) \iff 1-4+7+d = 0 \iff d = -4$.
Donc $M(x~;~y~;~z) \in (\text{ABC}) \iff x-2y+z-4 = 0$.

   c. $\text{D}(3~;~-6~;~1) \in (\text{ABC}) \iff 3+12+1-4 = 0 \iff 12 = 0$: cette égalité est fausse : le point D n'appartient pas au plan (ABC).

3. **a.** Cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}(2~;~-4~;~2)$ et le le vecteur $\overrightarrow{u}(1~;~-2~;~1)$ lui est normal au plan (ABC). Or $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u}$: le vecteur $\overrightarrow{w}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ est lui aussi normal au plan (ABC).

   b. Le point commun , s'il existe, a ses coordonnées qui vérifient les équations de la droite et l'équation du plan, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+3\\ y & = & -4t+5\\ z & = & 2t-1\\ x-2y+z-4 & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow 2t+3-2(-4t+5)+2t-1-4=0 \iff$$

$2t+3+8t-10+2t-1-4=0 \iff 12t-12=0 \iff t=1.$

En remplaçant dans les équations de la droite, on obtient :

$x=2+3=5,\quad y=-4+5=1,\quad z=2-1=1.$

$\text{H}(5\,;\,1\,;\,1)$.

4. On a $\overrightarrow{\text{DE}}(1\,;\,-2\,;\,-5)$.

$\overrightarrow{\text{DE}}=\overrightarrow{\text{AB}}$; donc la droite (DE) est parallèle à la droite (AB) donc la droite (DE) est parallèle au plan (ABC), et on a vu que D n'appartientpas au plan (ABC), donc la droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : préliminaires

1. a. $n^2 \equiv N-1 \quad \text{modulo } N \Rightarrow \left(n^2\right)^2 \equiv (N-1)^2 \quad \text{modulo } N$

Or $(N-1)^2=N^2-2N+1$ et $N^2\equiv 0 \quad \text{modulo } N$ et $-2N\equiv 0 \quad \text{modulo } N$, donc

$(N-1)^2\equiv 1 \quad \text{modulo } N$ et finalement car $n^4=n\times n^3$,

$n\times n^3\equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

b. On a $5^2=25=26-1$, donc $5^2\equiv -1 \quad \text{modulo}\,26$.

La question précédente montre que $5\times 5^3\equiv 1 \quad \text{modulo}\,26$.

Donc $k_1=5^3=125$.

2. a. $6A=\begin{pmatrix}24 & 6\\ 18 & 12\end{pmatrix}$ et $A^2=\begin{pmatrix}19 & 6\\ 18 & 7\end{pmatrix}$, donc $6A-A^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I$ (I matrice unité).

b. On a $6A-A^2=A(6I-A)=5I$ ou encore $A\times\dfrac{1}{5}(6I-A)=I$: cette égalité montre que la matrice A est inversible et que son inverse est

$A^{-1}=\dfrac{1}{5}(6I-A)=\dfrac{6}{5}I-\dfrac{1}{5}A.$

c. $A^{-1}=\dfrac{6}{5}I-\dfrac{1}{5}A \iff 5A^{-1}=6I-A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}=B.$

Conclusion $B=5A^{-1}$.

d. En partant de l'égalité précédente :

$B=5A^{-1} \iff BA=5A^{-1}A \iff BA=5I \iff BAX=5IX \iff$

$BY=5X.$

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

« ET » est codé par la matrice $X=\begin{pmatrix}4\\ 19\end{pmatrix}$.

Puis $Y = AX = \begin{pmatrix}35\\50\end{pmatrix}$, puis $R = \begin{pmatrix}9\\24\end{pmatrix}$ et d'après le tableau « ET » est codé « JY ».

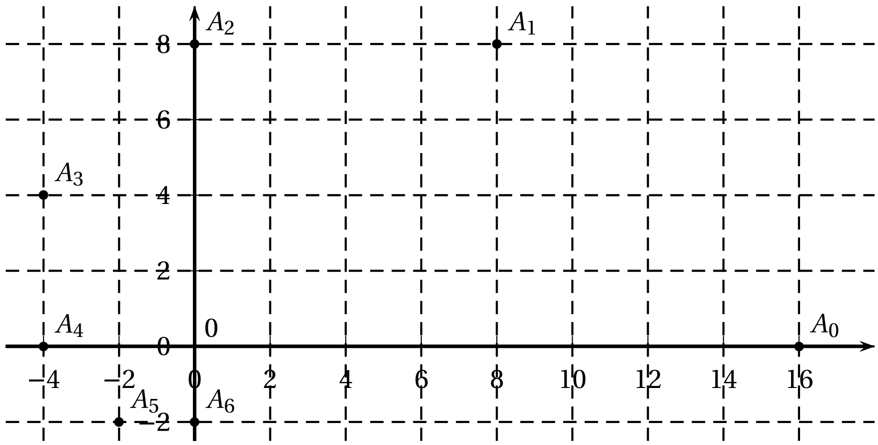
Partie C : procédure de décodage

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. On a $Y = AX \iff A^{-1}Y = X \iff 5A^{-1}Y = 5X = BY$ soit $Y = AX \iff \left\{\begin{array}{l c l}5x_1 & = & 2y_1 - y_2\\5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2\end{array}\right.$
2. La question 1. b. de la **partie A** a montré que $5 \times 21 \equiv 1 \quad$ modulo 26. Donc en reprenant le système de la question précédente et en multipliant par 21, on obtient :
$\left\{\begin{array}{l c l}21 \times 5x_1 & = & 21 \times \left(2y_1 - y_2\right)\\21 \times 5x_2 & = & 21 \times \left(-3y_1 + 4y_2\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}21 \times 5x_1 & = & 42y_1 - 21y_2\\21 \times 5x_2 & = & -63y_1 + 84y_2\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{l c l l}x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 & \text{modulo } 26\\x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 & \text{modulo } 26\end{array}\right.$
3. « QP » est associé à la matrice $\begin{pmatrix}16\\15\end{pmatrix}$.
En utilisant le résultat précédent :
$\left\{\begin{array}{l c l l}x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 & \text{modulo } 26\\x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 & \text{modulo } 26\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l l}x_1 & \equiv & 256 + 75 & \text{modulo } 26\\x_2 & \equiv & 240 + 90 & \text{modulo } 26\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{l c l l}x_1 & \equiv & 331 & \text{modulo } 26\\x_2 & \equiv & 330 & \text{modulo } 26\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}x_1 & = & 19\\x_2 & = & 18\end{array}\right.$
Le mot décodé est donc « TS ».

Annexe à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 2



Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1