

∞ **Corrigé du Concours contrôleur des douanes** ∞  
**Branche Contrôle des opérations commerciales - session 2025**  
**OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques**

**Exercice 1**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On note  $D$  la droite passant par les points  $A(3; -3; 0)$  et  $B(4; -1; -1)$ .

1. La droite  $D$  est l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $\vec{AM}$  et  $\vec{AB}$  soient colinéaires, c'est-à-dire tels que  $\vec{AM} = t\vec{AB}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\vec{AM} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x-3 \\ y-(-3) \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y+3 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-3) \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} = t\vec{AB} \iff \begin{cases} x-3 = t \times 1 \\ y+3 = t \times 2 \\ z = t \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3+t \\ y = -3+2t \\ z = -t \end{cases}$$

$$D \text{ a donc pour représentation paramétrique : } \begin{cases} x = 3+t \\ y = -3+2t \\ z = -t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

2.  $D'$  est la droite de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = 3k+1 \\ y = -k+3 \\ z = k-2 \end{cases}$  où  $k \in \mathbb{R}$

- a. La droite  $D'$  a pour vecteur directeur  $\vec{u}(3, -1, 1)$

- b.  $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 3 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times (-1) = 3 - 2 - 1 = 0$  donc les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{AB}$  sont orthogonaux. Les droites  $D'$  et  $D$  ont leurs vecteurs directeurs orthogonaux donc elles sont orthogonales.

- c. Les droites  $D'$  et  $D$  sont sécantes si et seulement si on peut trouver un couple

$$(k, t) \text{ de réels tel que : } \begin{cases} 3k+1 = 3+t \\ -k+3 = -3+2t \\ k-2 = -t \end{cases}$$

$$\text{Ce système équivaut à : } \begin{cases} 3k+1 = 3+(-k+2) \\ -k+3 = -3+2(-k+2) \\ -k+2 = t \end{cases}$$

$$\text{ou encore : } \begin{cases} 3k+1 = 3-k+2 \\ -k+3 = -3-2k+4 \\ -k+2 = t \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} 4k = 4 \\ k = -2 \\ -k+2 = t \end{cases}$$

Les deux premières équations sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution, et donc les droites  $D'$  et  $D$  ne sont pas sécantes.

3. On considère le plan  $P$  d'équation  $2x + y + 4z - 3 = 0$

- a. Tout point de la droite  $D$  a pour coordonnées  $(3+t, -3+2t, -t)$  où  $t \in \mathbb{R}$ .

On regarde si ces coordonnées vérifient l'équation du plan  $P$  :

$$2(3+t) + (-3+2t) + 4(-t) - 3 = 6+2t-3+2t-4t-3 = 0.$$

Donc tout point de la droite  $D$  appartient au plan  $P$  donc le plan  $P$  contient la droite  $D$

**b.** Tout point  $M$  de la droite  $D'$  a pour coordonnées  $(3k+1, -k+3, k-2)$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

On regarde s'il existe une valeur de  $k$  pour laquelle le point  $M$  appartient à  $P$ .

Dans ce cas :  $2(3k+1) + (-k+2) + 4(k-2) - 3 = 0$  soit  $6k+2-k+2+4k-8-3 = 0$   
soit  $9k = 6$  soit  $k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

On a alors :  $(3k+1, -k+3, k-2) = \left(3 \times \frac{2}{3} + 1, -\frac{2}{3} + 3, \frac{2}{3} - 2\right) = \left(3, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

Donc le plan  $P$  et la droite  $D'$  se coupent au point  $C$  de coordonnées  $\left(3, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

**4.** On considère la droite  $\Delta$  passant par le point  $C$  et de vecteur directeur  $\vec{v}(1; 2; -1)$ .

**a.** On démontre que les droites  $\Delta$  et  $D$  sont strictement parallèles.

- La droite  $D$  a pour vecteur directeur  $\vec{AB}$  de coordonnées  $(1, 2, -1)$ , et la droite  $\Delta$  a pour vecteur directeur  $\vec{v}$  de coordonnées  $(1, 2, -1)$ .

Donc les droites  $\Delta$  et  $D$  sont parallèles.

- Par définition le point  $C$  appartient à la droite  $\Delta$ . On sait aussi que  $C$  appartient à la droite  $D'$ . Comme les droites  $D$  et  $D'$  ne sont pas sécantes, le point  $C$  n'appartient pas à la droite  $D$ . On en déduit que les droites  $\Delta$  et  $D$  ne sont pas confondues.

Les droites  $\Delta$  et  $D$  sont parallèles non confondues, donc elles sont strictement parallèles.

**b.** On démontre que les droites  $\Delta$  et  $D'$  sont sécantes.

- On a vu que le point  $C$  appartenait à  $\Delta$  et à  $D'$ , donc le point  $C$  appartient à leur intersection.
- $\Delta$  et  $D$  sont parallèles, et  $D$  et  $D'$  sont orthogonales, donc  $\Delta$  et  $D'$  sont orthogonales donc ne sont pas confondues.

Les droites  $\Delta$  et  $D$  ne sont pas confondues et ont le point  $C$  en commun, donc elles sont sécantes en  $C$ .

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2}$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**1.** Soit  $u$  la fonction sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $u(x) = x^3 - 1 + 2 \ln(x)$ .

**a.**  $u'(x) = 3x^2 - 0 + 2 \times \frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

Donc la fonction  $u$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**b.**  $u(1) = 1^3 - 1 + 2 \ln(1) = 0$

On établit le tableau de variations de  $u$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$u(x)$			

On en déduit le signe de  $u(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$u(x)$		-	0
			+

2. a. On détermine les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

•  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2} = x - \frac{1}{x^2} \times \ln(x)$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ; donc, par produit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} \times \ln(x) = -\infty$ .

On a donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - \frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$  et donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}$ .

•  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2} = x - \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

Donc, par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$ .

On a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b. Pour tout  $x > 0$ , on a :  $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = 1 - \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4}$   
 $= 1 - \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3} = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln(x)}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}$

$x^3 > 0$  sur  $]0, +\infty[$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $u(x)$ .

$f(1) = 1 - \frac{\ln(1)}{1^2} = 1 - 0 = 1$

On construit le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$u(x)$		-	0
			+
$x^3$	0	+	+
$f'(x)$		-	0
			+
$f$	$+\infty$		$+\infty$
			1

3. a. Pour déterminer la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ , il faut déterminer le signe de  $(f(x) - x)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

$$f(x) - x = x - \frac{\ln(x)}{x^2} - x = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

On détermine alors les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et de  $\Delta$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	+
$x^2$	0		+
$f(x) - x$		0	-
		$\mathcal{C}$ est au dessus de $\Delta$	$\mathcal{C}$ est en dessous de $\Delta$

- b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| -\frac{\ln(x)}{x^2} \right| = 0$  d'après la question 2.a.

On en déduit que la droite d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

### Exercice 3

Amateur de mots croisés, Mathias s'entraîne sur un site internet.

40 % des grilles qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.

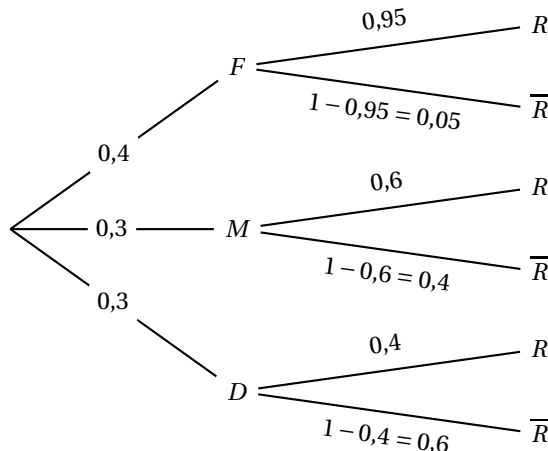
Mathias sait qu'il réussit les grilles de niveau facile dans 95 % des cas, de niveau moyen dans 60 % des cas et de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de mots croisés lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

- $F$  : « La grille de mots croisés est de niveau facile. »;
- $M$  : « La grille de mots croisés est de niveau moyen. »;
- $D$  : « La grille de mots croisés est de niveau difficile. »;
- $R$  : « Mathias réussit la grille. » et  $\bar{R}$  son événement contraire.

1. On traduit les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.



2. a. La probabilité que la grille de mots croisés proposée soit de niveau difficile et que Mathias la réussisse est  $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$ .

b. La probabilité que la grille de mots croisés proposée soit de niveau facile et que Mathias ne la réussisse pas est  $P(F \cap \bar{R}) = P(F) \times P_F(\bar{R}) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$ .

c. La probabilité que Mathias réussisse la grille proposée est  $P(R)$ .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(F \cap R) + P(M \cap R) + P(D \cap R) = 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 = 0,68$$

3. Sachant que Mathias n'a pas réussi la grille proposée, la probabilité que ce soit une grille de mots croisés de niveau moyen est

$$P_{\bar{R}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0,3 \times 0,4}{1 - 0,68} = \frac{0,12}{0,32} = 0,375$$

4. Mathias a réussi la grille proposée.

Sa petite sœur Elyne affirme : « Je pense que ta grille était facile ».

On cherche la probabilité que la grille soit facile, sachant que Mathias l'a réussie :

$$P_R(F) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{0,4 \times 0,95}{0,68} = \frac{0,38}{0,68} > \frac{1}{2}$$

Elyne a plus d'une chance sur deux d'avoir raison.

#### Exercice 4

Le nombre d'arbres de la forêt de Xivry, en milliers d'unités, est modélisé par la suite  $(u_n)$  où  $u_n$  désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année  $(2024 + n)$ .

En 2024, la forêt de Xivry possède 50 000 arbres.

Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, l'ONE, l'Office National des Forêts, décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. D'après le texte

- Il y a 50 000 arbres en 2024 donc  $u_0 = 50$ .
- Abattre 5 % des arbres, revient à en garder 95 %, donc à multiplier par 0,95.
- Planter 3 000 arbres revient à ajouter 3.
- On multiplie par 0,95 puis on ajoute 3 donc  $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$ .

Donc la situation peut être modélisée par : 
$$\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0,95u_n + 3 \end{cases} \text{ pour tout } n$$

2. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n$  par la relation :  $v_n = 60 - u_n$ .

Il en découle que  $u_n = 60 - v_n$ .

$$\begin{aligned} \text{a. } v_n = 60 - u_n \text{ donc } v_{n+1} &= 60 - u_{n+1} = 60 - (0,95u_n + 3) = 60 - 0,95u_n - 3 \\ &= 57 - 0,95(60 - v_n) = 57 - 0,95 \times 60 + 0,95v_n \\ &= 57 - 57 + 0,95v_n = 0,95v_n \end{aligned}$$

Donc la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,95.

$$\text{b. } v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$$

La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,95$  et de premier terme  $v_0 = 10$  donc, pour tout  $n$ , on a :  $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times (0,95)^n$ .

$$\text{c. Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } u_n = 60 - v_n \text{ donc } u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n.$$

3.  $2029 = 2024 + 5$ ;  $u_5 = 60 - 10 \times 0,95^5 \approx 60 - 10 \times 0,7737 \approx 60 - 7,737 \approx 52,263$

Le nombre d'arbres de la forêt en 2029 est estimé à 52 263.

$$\begin{aligned}
 \text{a. Pour tout } n \text{ on a : } u_{n+1} - u_n &= (60 - 10 \times (0,95)^{n+1}) - (60 - 10 \times (0,95)^n) \\
 &= 60 - 10 \times (0,95)^{n+1} - 60 + 10 \times (0,95)^n \\
 &= 10 \times (0,95)^n (1 - 0,95) \\
 &= 10 \times (0,95)^n \times 0,05 = 0,5 \times (0,95)^n
 \end{aligned}$$

**b.** Pour tout  $n$ ,  $0,5 \times (0,95)^n > 0$  donc  $u_{n+1} - u_n > 0$ , donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

4. On veut déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % celui de 2024.

Le nombre d'arbres de 2024 est 50 000; si on augmente de 10 %, cela donne 55 000 arbres. On cherche donc le plus petit entier  $n$  vérifiant  $u_n > 55$ . On résout cette équation.

$$\begin{aligned}
 u_n > 55 &\iff 60 - 10 \times (0,95)^n > 55 \iff 5 > 10 \times (0,95)^n \iff 0,5 > (0,95)^n \\
 &\iff \ln(0,5) > \ln((0,95)^n) \iff \ln(0,5) > n \times \ln(0,95) \iff \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} < n
 \end{aligned}$$

$$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \approx 13,51 \text{ donc on prendra } n = 14.$$

2024 + 14 = 2038 donc c'est à partir de 2038 que le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % celui de 2024.

5.  $0 < 0,95 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,95)^n = 0$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 60 - 10 \times (0,95)^n = 60$ .

La limite de la suite  $(u_n)$  est donc 60.

À long terme, le nombre d'arbres va tendre vers 60 000.