

∞ Corrigé du Concours contrôleur des douanes ∞

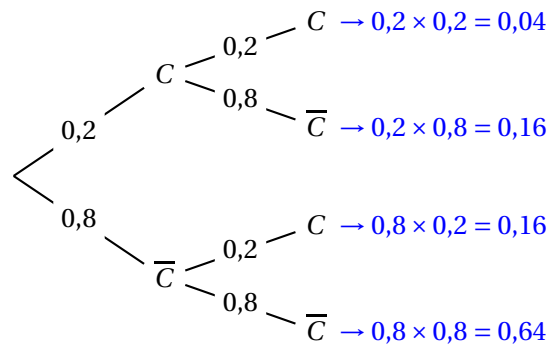
Branche surveillance - session 2025

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Exercice 1

Dans une fête foraine, un ticket enfant permet d'effectuer autant de tirs successifs qu'il est nécessaire pour crever un ballon. À chacun de ses tirs, on considère qu'un enfant a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé.

1. a. On appelle C l'évènement « le ballon est crevé », et \bar{C} l'évènement contraire. On représente la situation par un arbre pondéré.



Au bout de deux tirs, il y a quatre résultats possibles : (C, C) , (C, \bar{C}) , (\bar{C}, C) et (\bar{C}, \bar{C}) , de probabilités respectives : 0,04, 0,16, 0,16 et 0,64.

La probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact correspond à l'évènement (\bar{C}, \bar{C}) et est donc égale à 0,64 soit $0,8^2$.

- b. L'évènement « deux tirs suffisent pour crever le ballon » est l'évènement contraire de l'évènement « au bout de deux tirs le ballon est intact ».

Sa probabilité est donc $1 - 0,64 = 0,36$.

- c. L'évènement « n tirs suffisent pour crever le ballon » est l'évènement contraire de l'évènement « au bout de n tirs le ballon est intact ».

L'évènement « au bout de n tirs le ballon est intact » correspond à l'évènement $(\bar{C}, \bar{C}, \dots, \bar{C})$ de probabilité $0,8 \times 0,8 \times \dots \times 0,8 = 0,8^n$.

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n\text{-uplet}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n \text{ facteurs}}$

Donc la probabilité p que n tirs suffisent pour crever le ballon est $p = 1 - 0,8^n$.

2. Un deuxième stand de tir propose la règle suivante :

- Le joueur lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée).
- Soit k le numéro de la face obtenue, le joueur peut réaliser au maximum k tirs pour crever le ballon.

D'après la question précédente, la probabilité que k tirs suffisent pour crever le ballon est $p_k = 1 - 0,8^k$.

On appelle D la variable aléatoire qui donne le résultat au lancer du dé. Le dé tétraédrique étant régulier, on aura : $P(D = 1) = P(D = 2) = P(D = 3) = P(D = 4)$, et comme il y a quatre résultats possibles, chacune de ces probabilités est égale à $\frac{1}{4}$.

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de crever le ballon est :

$$\begin{aligned}
 P(D=1) \times p_1 + P(D=2) \times p_2 + P(D=3) \times p_3 + P(D=4) \times p_4 &= \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
 &= \frac{1}{4}(0,2 + 0,36 + (1 - 0,8^3) + (1 - 0,8^4)) \approx \frac{1}{4}(0,2 + 0,36 + 1 - 0,512 + 1 - 0,41) \\
 &\approx \frac{1}{4} \times 1,638 \approx 0,41
 \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = 2xe^{-x}$.

1. a. On résout sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\iff 2xe^{-x} = x \iff 2xe^{-x} - x = 0 \iff x(2e^{-x} - 1) = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } 2e^{-x} - 1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 2e^{-x} = 1 \iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = \frac{1}{2} \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x = 0 \text{ ou } x = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Or $-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$ donc les solutions de l'équation sont $x = 0$ et $x = \ln(2) \approx 0,69$.

b. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$f'(x) = 2 \times e^{-x} + 2x \times (-1)e^{-x} = 2e^{-x} - 2xe^{-x} = 2(1 - x)e^{-x}.$$

c. On détermine le signe de $f'(x)$ sur $[0; 1]$.

x	0	1
$1 - x$		0
e^{-x}		
$f'(x)$		0

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} \approx 2 \times 0,37 \text{ donc } f(1) \approx 0,74$$

On en déduit les variations de f sur $[0; 1]$.

x	0	1
$f'(x)$		0
$f(x)$	0	0,74

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$

2. a. Soit \mathcal{P}_n la propriété $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n .

• **Initialisation**

$$u_0 = 0,1 \text{ et } u_1 = f(u_0) = 2u_0e^{-u_0} = 0,2e^{-0,1} \approx 0,2 \times 0,90 \approx 0,18$$

$$0 \leq 0,1 < 0,18 \leq 1 \text{ donc } 0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

• **Hérédité**

On suppose que la propriété est vraie au rang $n \geq 0$, c'est-à-dire que

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

La fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$, donc

$$f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1).$$

$$\text{Or } f(0) = 0, f(u_n) = u_{n+1}, f(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } f(1) \approx 0,74.$$

$$\text{On a donc } 0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 0,74, \text{ et donc } 0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ donc elle est héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.

b. On a démontré :

- que pour tout n , on a $u_n < u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est croissante;
- que pour tout n , on a $u_n < 1$, donc la suite (u_n) est majorée par 1.

La suite (u_n) est croissante majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ sa limite.

c. Pour tout n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$, et la suite (u_n) converge vers ℓ .

On en déduit que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

Autrement dit, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

On a vu que cette équation admettait deux solutions : 0 et $\ln(2)$.

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 0,1$; donc la limite ℓ est supérieure à u_0 donc à 0,1. On en déduit que ℓ ne peut être 0 donc $\ell = \ln(2)$.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan \mathcal{P} caractérisé par le point A (4 ; 2 ; -1) et les vecteurs \vec{u} (3 ; 1 ; 5) et \vec{v} (-2 ; -1 ; 0).

1. $y_{\vec{u}} \times (-1) = y_{\vec{v}}$ et $x_{\vec{u}} \times (-1) \neq x_{\vec{v}}$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.
2. Le point P (5 ; 2 ; 4) appartient au plan \mathcal{P} si et seulement si les vecteurs \vec{AP} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{AP} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{AP} = a\vec{u} + b\vec{v} &\iff \begin{cases} x_P - x_A = a x_{\vec{u}} + b x_{\vec{v}} \\ y_P - y_A = a y_{\vec{u}} + b y_{\vec{v}} \\ z_P - z_A = a z_{\vec{u}} + b z_{\vec{v}} \end{cases} \iff \begin{cases} 5 - 4 = 3a - 2b \\ 2 - 2 = a - b \\ 4 - (-1) = 5a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1 = 3a - 2b \\ 0 = a - b \\ 5 = 5a \end{cases} \end{aligned}$$

De la 3^e équation, on tire $a = 1$. De la 2^e on tire $b = a$ donc $b = 1$. Et on vérifie dans la 1^{re} équation : $3a - 2b = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$.

Donc $\vec{AP} = \vec{u} + \vec{v}$ et donc le point P appartient au plan \mathcal{P} .

Le point Q (0 ; -1 ; 10) appartient au plan \mathcal{P} si et seulement si les vecteurs \vec{AQ} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{AQ} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} &\iff \begin{cases} x_Q - x_A = a x_{\overrightarrow{u}} + b x_{\overrightarrow{v}} \\ y_Q - y_A = a y_{\overrightarrow{u}} + b y_{\overrightarrow{v}} \\ z_Q - z_A = a z_{\overrightarrow{u}} + b z_{\overrightarrow{v}} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 - 4 = 3a - 2b \\ -1 - 2 = a - b \\ 10 - (-1) = 5a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -4 = 3a - 2b \\ -3 = a - b \\ 11 = 5a \end{cases} \end{aligned}$$

De la 3^e équation, on tire $a = 2,2$. De la 2^e on tire $b = a + 3$ donc $b = 5,2$. Et on vérifie dans la 1^{re} équation : $3a - 2b = 3 \times 2,2 - 2 \times 5,2 = 6,6 - 10,4 = -3,8 \neq -4$.

Donc il n'existe pas de couple de réels (a, b) tel que $\overrightarrow{AQ} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ et donc le point Q n'appartient pas au plan \mathcal{P} .

3. Soient les deux points $S\left(7; -2; \frac{10}{3}\right)$ et $R(2; 3; 3)$.

Le point S appartient à la droite (PR) si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{PR} et \overrightarrow{PS} sont colinéaires.

$$\overrightarrow{PR} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_R - x_P \\ y_R - y_P \\ z_R - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ 3 - 2 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PS} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_S - x_P \\ y_S - y_P \\ z_S - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 5 \\ -2 - 2 \\ \frac{10}{3} - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$y_{\overrightarrow{PR}} = 1 \text{ et } y_{\overrightarrow{PS}} = -4 \text{ donc } -4 \times y_{\overrightarrow{PR}} = y_{\overrightarrow{PS}}$$

$$x_{\overrightarrow{PR}} = -3 \text{ et } x_{\overrightarrow{PS}} = 2; \text{ donc } -4 \times x_{\overrightarrow{PR}} = 12 \neq x_{\overrightarrow{PS}}$$

Donc les vecteurs \overrightarrow{PR} et \overrightarrow{PS} ne sont pas colinéaires et donc le point S n'appartient pas à la droite (PR).

4. On calcule les distances PQ et PR.

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2 = (0 - 5)^2 + (-1 - 2)^2 + (10 - 4)^2 \\ &= (-5)^2 + (-3)^2 + 6^2 = 25 + 9 + 36 = 70 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } PQ = \sqrt{70}.$$

$$PR^2 = (-3)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 9 + 1 + 1 = 11$$

$$\text{Donc } PR = \sqrt{11}.$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \ln(t) dt$.

1. $f(1) = \int_1^1 \ln(t) dt = 0$

2. On va utiliser la propriété suivante (positivité de l'intégrale) :

si $a < b$ et si pour $t \in [a; b]$ on a $g(t) \geq 0$, alors $\int_a^b g(t) dt > 0$.

On étudie le signe de f sur $]1; +\infty[$, puis sur $]0; 1[$.

- Si $x \in]1; +\infty[$, on a $1 \leq t \leq x$ donc $\ln(t) \geq 0$ et donc $\int_1^x \ln(t) dt > 0$.

- Si $x \in]0; 1[$, on a $\int_1^x \ln(t) dt = -\int_x^1 \ln(t) dt = \int_x^1 (-\ln(t)) dt$

$$x \leq t \leq 1 \text{ donc } \ln(t) \leq 0, \text{ donc } -\ln(t) \geq 0 \text{ et donc } \int_x^1 (-\ln(t)) dt > 0.$$

Sur les deux intervalles, $f(x) > 0$.

3. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$.

4. On dresse le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \ln(x)$	-	0	+
f			

On vérifie bien que si $0 < x < 1$, on a $f(x) > 0$, et que si $x > 1$, on a aussi $f(x) > 0$.

5. Une intégration par partie nous donne : $\int \ln(t) dt = [t \ln(t)] - \int 1 dt$.

$$\begin{aligned} \text{Donc pour tout } x > 0, f(x) &= \int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x 1 dt = (x \ln(x) - 1 \ln(1)) - [t]_1^x \\ &= x \ln(x) - 0 - (x - 1) = x \ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

6. a. $f(e) = e \times \ln(e) - e + 1 = e \times 1 - e + 1 = 1$

b. On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$.

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x) - x) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x) - x + 1) = 1$, et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$

c. $f(x) = x \ln(x) - x + 1 = x(\ln(x) - 1) + 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x) - 1) = +\infty$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x) - 1) + 1 = +\infty$ et donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.