Corrigé du concours de contrôleur des douanes session 2017

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

20 février 2017 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

Exercice 1

1. **a.** Avec le dé, la probabilité de tirer un multiple de 3 est $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$: dans ce cas la probabilité de tirer une boule noire est nulle.
Avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$ on tire un numéro non multiple de 3 ; dans ce cas la probabilité de tirer une boule noire est $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Finalement la probabilité de tirer une boule noire est $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

   b. La probabilité de tirer une boule est $\dfrac{1}{3}$ (il faut avoir d'abord un multiple de 3), et ensuite dans l'urne A on a une probabilité $\dfrac{3}{4}$ d'avoir une boule verte.
La probabilité d'avoir une boule verte est donc égale à $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.
La probabilité de tirer une boule rouge est donc égale à :
$1 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{12}{12} - \left(\dfrac{4}{12} + \dfrac{3}{12}\right) = \dfrac{5}{12}$.
Comme $\dfrac{5}{12} > \dfrac{4}{12} > \dfrac{3}{12}$, c'est la couleur rouge qui a le plus de chances de sortir.

   c. La probabilité de tirer une rouge de l'urne A est $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$.
La probabilité de tirer une rouge de l'urne B est $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{4}{12}$.
La probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge est donc $\dfrac{\frac{4}{12}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{4}{5}$.

2. On a une urne avec 2 noires, 3 rouges et 3 vertes

   a. On peut faire un arbre de 27 branches, mais on peut recenser les tirages se terminant pat une noire (N) et calculer leur probabilité :
NRN : $\dfrac{2}{8} \times 37 \times 16 = \dfrac{1}{56}$
NVN : $\dfrac{2}{8} \times 37 \times 16 = \dfrac{1}{56}$
RNN : $\dfrac{3}{8} \times 27 \times 16 = \dfrac{1}{56}$
RRN : $\dfrac{3}{8} \times 27 \times 26 = \dfrac{2}{56}$

RVN : $\dfrac{3}{8} \times 37 \times 16 = \dfrac{3}{56}$
VNN : $\dfrac{3}{8} \times 27 \times 16 = \dfrac{1}{56}$
VRN : $\dfrac{3}{8} \times 37 \times 26 = \dfrac{3}{56}$
VVN : $\dfrac{3}{8} \times 27 \times 26 = \dfrac{2}{56}$
La probabilité de tirer une noire en troisième boule est égale à : $\dfrac{14}{56} = \dfrac{1}{4}$.

b. La probabilité de l'évènement « la première boule tirée est noire » est égale à $\dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$: c'est la même que celle de la question précédente.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

1. • $u_2 = 5u_1 - 4u_0 = 5 - 0 = 5$;
• $u_3 = 5u_2 - 4u_1 = 25 - 4 = 21$;
• $u_4 = 5u_3 - 4u_2 = 105 - 20 = 85$;

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \Longrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = 5u_{n+1} - 4u_n - u_{n+1}$ ou $u_{n+2} - u_{n+1} = 4u_{n+1} - 4u_n \iff u_{n+2} - u_{n+1} = 4\left(u_{n+1} - u_n\right)$.
Donc la différence entre deux termes consécutifs est à chaque rang multipliée par 4 :
$0 \to 4 \times 0 + 1 = 1 \to 4 \times 1 + 1 = 5 \to 4 \times 5 + 1 = 21 \to \ldots$
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + 4u_n$.

3. **a.** On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{1}{3} = 4u_n + 1 + \dfrac{1}{3} = 4u_n + \dfrac{4}{3} = 4\left(u_n + \dfrac{1}{3}\right) = v_{n+1} = 4v_n$.
Ceci montre que (v_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3} \times 4^n$.
Or $v_n = u_n + \dfrac{1}{3} \iff u_n = v_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \times 4^n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$.
Rem. Puisque les termes de la suite (u_n) sont des naturels, on a démontré en passant que les nombres de la forme $4^n - 1$ sont des multiples de 3 !

Exercice 3

Soient

$$\text{A}(1\,;2\,;0),\qquad \text{B}(2\,;2\,;0),\qquad \text{C}(1\,;3\,;0)\quad \text{et}\quad \text{D}(1\,;2\,;1)$$

quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A.
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A.
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. (P) a pour vecteur normal $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

On sait alors que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (P) \iff -1\times x+1\times y+0\times z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, ou encore $-x+y+d=0$.
Mais on sait que
$\text{A}(1\,;\,2\,;\,0)\in(P) \iff -1+2+d=0 \iff d=-1$. Finalement :
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(P) \iff -x+y-1=0 \iff x-y+1=0$.
Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x-y+1=0$.

2. **a.** Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x-y+1 &=& 0 & (1)\\ -y+z+2 &=& 0 & (2)\\ -x+z+1 &=& 0 & (3)\end{array}\right.$$

En calculant (2) - (3) on obtient $x-y+1=0$ soit la ligne (1), donc on peut supprimer la ligne (2) ou (3) par exemple la (3) ; il faut donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x-y+1 &=& 0 & (1)\\ -y+z+2 &=& 0 & (2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x-y+1 &=& 0 & (1)\\ y &=& z+2 & (2')\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x &=& y-1 & (1)\\ y &=& z+2 & (2')\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} x &=& z+1 & (1)\\ y &=& z+2 & (2')\\ z &=& z & \end{array}\right.$$

Si l'on préfère avec $z=t,\ t\in\mathbb{R}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x &=& t+1 & (1)\\ y &=& t+2 & (2')\\ z &=& t & \end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}$$

b. On reconnait les équations paramétrique de la droite contenant le point de coordonnées $(1\,;2\,;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Si on veut trouver la droite d) il suffit de poser $t'=t-1 \iff t=t'+1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t'+2\\ y &=& t'+3\\ z &=& t'+1\end{array}\right. \qquad t'\in\mathbb{R}$$

Ce sont bien les équations paramétriques de la droite contenant $\text{A}(2\,;3\,;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

c. On a $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc définissent bien le plan (BCD) ; de plus :
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}=-1+1+0=0$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}=-1+0+1=0$: le vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), c'est donc un vecteur normal à ce plan.

Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{BCD}) \iff 1x+1y+1z+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$. Or :
$\text{B}(1\ ;\ 2\ ;\ 0) \in (\text{BCD}) \iff 1+2+0+d=0 \iff d=-3$.
Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{BCD}) \iff x+y+z-3=0$.

3. • Équation du plan (ABC) :
Les points A B et C ont une cote nulle donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABC}) \iff z=0$.
• Équation du plan (ABD)
Les points A B et D ont une ordonnée égale à 2 donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABD}) \iff y=2$.
• Équation du plan (ACD)
Les points A C et D ont une abscisse égale à 1 donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ACD}) \iff x=1$.

Exercice 4

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=\text{e}^x(1-x)+1$$

a. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g est dérivable et sur $\mathbb{R}$,
$g'(x)=\text{e}^x(1-x)-\text{e}^x=-x\text{e}^x$.
Comme $\text{e}^x>0$, quel que soit le réel x, $\text{e}^x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$
- $g'(x)>0$ sur $\mathbb{R}_-$, donc g est croissante sur cet intervalle;
- $g'(x)<0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc g est croissante sur cet intervalle;
- $g'(x)=0$ si $x=0$ donc $g(0)=1$ est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$. g est croissante sur cet intervalle;

Comme $\text{e}^x>0$, quel que soit le réel x, $\text{e}^x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$

b. On a $g(x)=\text{e}^x-x\text{e}^x+1$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^x=\lim\limits_{x\to-\infty}x\text{e}^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{e}^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.
Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction g est continue car dérivable et strictement décroissante de 1 à $-\infty$: il existe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in -0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.
On note α cette solution. (On prendra $\text{e}^{1,27}\approx 3,56$ et $\text{e}^{1,28}\approx 3,59$).

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
Comme $g(1,27)\text{e}^{1,27}\times(1-1,27)+1\approx 3,56\times(-0,27)+1\approx 0{,}038\,8$ et $g(1,28)$ $e^{1,28}(1-1,28)+1\approx 1-3,59\times(-0,28)\approx -0{,}005\,2$ en reprenant le même théorème sur l'intervalle [1,27; 1,28], on a donc $\alpha \in]1,27\ ;\ 1,28[$ tel que $g(\alpha)=0$.
Comme la fonction est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a $g(x)>0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$ et $g(x)<0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x}{\text{e}^x+1}+2.$$

a. • Limite en $-\infty$:
On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^x+1=0$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$.
• Limite en $+\infty$:
On sait par puissances comparées que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\text{e}^x+1}=0$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

b. Soit la fonction δ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\delta(x) = f(x) - (x+2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} + 2 - x - 2 = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} - x = \dfrac{x - x\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x+1 = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \delta(x) = 0$: ceci montre que géométriquement la droite (d) d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

c. On a $\delta(x) > 0$ car quotient de deux termes positifs, ce qui montre que $f(x) \geqslant x+2$, donc que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'asymptote (d).

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$.

Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1-x)+1 = g(x)$, donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.

4. On sait que $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha)+1 = 0$.

On en déduit que $\mathrm{e}^{\alpha} + 1 - \alpha\mathrm{e}^{\alpha} = 0 \iff \mathrm{e}^{\alpha}+1 = \alpha\mathrm{e}^{\alpha}$.

Donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha}+1} + 2 = \dfrac{\alpha}{\alpha\mathrm{e}^{\alpha}} + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\{}alpha} + 2$.

Mais $\mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha)+1 = 0$ entraîne en multipliant par $\mathrm{e}^{-\alpha}$:

$1 - \alpha + \mathrm{e}^{-\alpha} \iff \mathrm{e}^{-\alpha} = \alpha - 1$.

Finalement $f(\alpha) = \alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$

Conclusion $p = q = 1$.

5. On a vu que g ne s'annule qu'en $\alpha \approx 1,27$, donc $g(x)$ et donc $f'(x)$ est positif sur $]-\infty~;~\alpha[$ et négatif sur $]\alpha~;~+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty~;~\alpha[$ de moins l'infini à $\alpha+1$ puis décroissante de $\alpha+1$ jusqu'à 2.