∽ Concours contrôleur des douanes session 2015 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

23 février 2015   Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = x + 2 + \frac{16}{x-1}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. • Limite en plus l'infini :
   On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x-1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   • Limite en moins l'infini :
   On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{16}{x-1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+2 = -\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   • Limite en 1 :
   Pour $x > 1$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{16}{x-1} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+2 = 3$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
   Pour $x < 1$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{16}{x-1} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+2 = 3$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2. Soit la fonction d définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $d(x) = f(x) - (x+2) = \dfrac{16}{x-1}$.
   On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = \lim_{x\to-\infty} d(x) = 0$.
   Ceci montre que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de l'infini.
3. f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 1 - \dfrac{16}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 - 16}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1+4)(x-1-4)}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$.
   Comme $(x-1)^2 >$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $(x+3)(x-5)$.
   Celui-ci est positif sauf entre les racines -3 et 5.
   Donc la fonction f est croissante sauf sur l'intervalle $[-3\,;\,5]$ où elle est décroissante.
   On a $f(-3) = -3 + 2 + \dfrac{16}{-3-1} = -1 - 4 = -5$ et $f(5) = 5 + 2 + \dfrac{16}{5-1} = 7 + 4 = 11$.
4. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	11	↗	$+\infty$

5. On a $M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

Avec $f(0) = 2 + \dfrac{16}{-1} = -14$ et $f'(0) = \dfrac{3\times(-5)}{(-1)^2} = -15$, on obtient :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y-(-14) = -15(x-0) \iff y = -15x - 14$.

Exercice 2

1. Si $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ étaient colinéaires le plan défini par $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{k}$ serait le même que le plan défini par $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ et les trois vecteurs seraient coplanaires : impossible.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si par exemple il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}$ soit :

$\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k} = \alpha(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}) + \beta(\overrightarrow{\jmath} + 5\overrightarrow{k}) \iff \overrightarrow{\imath}(1-\alpha) + \overrightarrow{\jmath}(-1-1-1) + \overrightarrow{k}(2-5\beta) = 0$

Or les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ étant non coplanaires l'égalité précédente entraîne que :

$1-\alpha = -3 = 2-5\beta = 0$: ce système n'a pas de solution, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires

3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ étant un vecteur normal à (P), on sait que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (P) \iff 1x - 1y + 2z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}$. Or

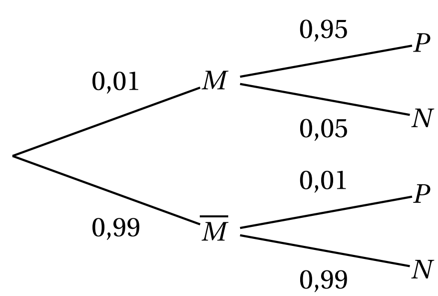
$A(1\,;\,-1;\,0) \in (P) \iff 1+1+0+d = 0 \iff d = -2$. Donc

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (P) \iff x - y + 2z - 2 = 0$.

4. $\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}}\,;\,y_{\mathrm{B}}\,;\,z_{\mathrm{B}}\right) \in (P) \iff x_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{B}} + 2z_{\mathrm{B}} - 2 = 0$.

Exercice 3

1.



2. On a $p(M\cap P) = p(M)\times p_M(P) = 0,01\times 0,95 = 0,0095$.

3. On a de même $p\left(\overline{M}\cap P\right) = p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(P) = 0,99\times 0,01 = 0,0099$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(P) = p(M\cap P) + p\left(\overline{M}\cap P\right) = 0,0095 + 0,0099 = 0,0194$.

4. Il faut calculer $p_P(M) = \dfrac{p(P\cap M)}{p(P)} = \dfrac{p(M\cap P)}{p(P)} = \dfrac{0,0095}{0,0194} = \dfrac{95}{194} \approx 0,490$.

5. On peut considérer que la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes positives pari les 5 interrogées suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p(P) = 0,0194$.

On a $p(X=0) = \binom{5}{0}\times 0,0194^0 \times (1-0,0194)^5 \approx 0,907$.

Exercice 4

1.
$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{(k-1)} = (n-1)2^n + 1.$$

Démonstration par récurrence :

Initialisation :

Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} 1\cdot 2^{(0)} = 1$ et $0\cdot 2^1 + 1 = 1$.

L'égalité est vraie au rang 1.

Herédité :

On suppose que pour $n \geqslant 1$: $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{(k-1)} = (n-1)2^n + 1$.

Alors $\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^{(k-1)} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{(k-1)} + (n+1)\cdot 2^n = (n-1)2^n + 1 + (n+1)\cdot 2^n =$
$2^n(n-1+n+1)+1 = n\times 2\times 2^n + 1 = n\times 2^{n+1} + 1$: l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'égalité est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{(k-1)} = (n-1)2^n + 1$.

2. Calculez
$$\sum_{k=3}^{103} (3k+1).$$

Soit $S = 10+13+16+\ldots+304+307+310$ ou encore

$S = 310+307+304+\ldots+16+13+10$; en sommant les deux lignes précédentes verticalement, on a :

$2S = 320+320+320+\ldots+320+320+320 = 101\times 320$, d'où $S = \dfrac{101\times 320}{2} = 101\times 160 =$ 16 160.