∽ Concours contrôleur des douanes session 2018 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

19 février 2018 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

N. B. : Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. **a.** La probabilité est égale à $\left(\dfrac{7}{12}\right)^3 = \dfrac{7^3}{12^3} = \dfrac{343}{1\,728}$.
   b. La probabilité est égale à $\dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{12} = \dfrac{7}{432}$.
   c. Il y a 6 possibilités ; 123, 132, 213, 231, 312, 321 avec à chaque fois une probabilité de $\dfrac{7}{432}$, soit une probabilité de $6 \times \dfrac{7}{432} = \dfrac{7}{72}$.
2. La probabilité de choisir A est $\dfrac{2}{3}$, celle de choisir B : $\dfrac{1}{3}$.
   a. Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité que la case 3 soit atteinte ?
   - si le choix est A la probabilité est de $\dfrac{7}{12}$;
   - si le choix est B la probabilité est de $\dfrac{1}{3}$;

   La probabilité d'avoir un 3 en un lancer est égale :
   $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{18} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{18} + \dfrac{2}{18} = \dfrac{9}{18} = \dfrac{1}{2}$.

   b. Sur les 9 chances sur 18 d'avoir tiré un 3, 7 proviennent du lanceur A, donc la probabilité cherchées est égale à $\dfrac{7}{9}$.

Exercice 2

1. $$\left\{\begin{array}{rcrl} 2x - y - 3z & = & 1 & (1)\\ 3x + 2y - 2z & = & -4 & (2)\\ -x - 4y + 6z & = & 22 & (3)\end{array}\right.$$

   Dans les deux premières expressions exprimons x et y en fonction de z :
   $$\left\{\begin{array}{lcrl} 2x - y & = & 1 + 3z & (1')\\ 3x + 2y & = & 2z - 4 & (2')\\ -x - 4y + 6z & = & 22 & (3)\end{array}\right.$$
   On multiplie chaque membre de $(1')$ par 2 et on l'ajoute à la ligne $(2')$:
   $-x = -4z - 6$ ou $x = 4z + 6$ et en reportant dans $(1')$, on obtient :

$y = 2x - 3z - 1 = 8z + 12 - 3z - 1$ ou $y = 5z + 11$.

En reportant ces deux valeurs de x et y en fonction de z dans (3) on obtient :

$-4z - 6 - 20z - 44 + 6z = 22 \iff -18z - 50 = 22 \iff -72 = 18z \iff -12 = 3z \iff z = -4$.

On a donc $x = 1 \times (-4) + 6 = -10$ et $y = 5 \times (-4) + 11 = -9$.

Les trois plans ont donc un seul point commun de coordonnées $(-10\,;\,-9\,;\,-4)$.

2. Soient trois plans (S), (T), (U), définis respectivement par les équations cartésiennes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y - 2z & = & 1 \\ x - y - 4z & = & 3 \\ 2x + 3y - 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Avec la même méthode, mais ici la somme des deux premières lignes donnent directement :

$2x - 6z = 4 \iff 2x = 6z + 4 \iff x = 3z + 2$, puis $y = -x + 2z$ (avec (1)), soit :

$y = -6z - 4 + 2z = -4z - 4$.

En reportant ces deux valeurs dans (3) on obtient :

$2(3z + 2) + 3(-4z - 4) - 3z = 1 \iff 6z + 4 - 12z - 12 - 3z = 1 \iff -9z - 8 = 1 \iff -9 = 9z \iff z = -1$.

On en déduit : $x = 3 \times (-1) + 2 = -1$ et $y = -4 \times (-1) - 4 = 0$.

Les trois plans ont donc un seul point commun de coordonnées $(-1\,;\,0\,;\,-1)$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1.
- $u_1 = \dfrac{1}{3} + 0 - 2 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$;
- $u_2 = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{5}{3}\right) + 1 - 2 = -\dfrac{5}{9} - 1 = -\dfrac{14}{9}$;
- $u_3 = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{14}{9}\right) + 2 - 2 = -\dfrac{14}{27}$.

2. **a.** *Initialisation* : $u_4 = \dfrac{1}{3} \times -\dfrac{14}{27} + 3 - 2 = -\dfrac{14}{81} + 1 = \dfrac{67}{81} > 0$: l'inégalité est vraie au rang $n = 4$;

Hérédité : supposons que pour $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$, alors :

$\dfrac{1}{3}u_n \geqslant 0$ et $n - 2 \geqslant 2$ soit par somme :

$\dfrac{1}{3}u_n + n - 2 = u_{n+1} \geqslant 2 \geqslant 0$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

La relation est vraie au rang 4 et si elle est vraie à un rang n supérieur elle est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence pour $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

b. D'après le résultat précédent pour $n \geqslant 4$, alors $u_n \geqslant 0$.

Puisque $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$ et que $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant 0$ on a de façon évidente $u_{n+1} \geqslant n - 2 > n - 3$.

c. On a donc : pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n-3$ Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, on a par minoration : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. la suite est divergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

a. Par définition de la suite $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \dfrac{21}{2} = -2\left(\dfrac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{2}{3}u_n + 2n - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{3}\left(u_n + 3n - \dfrac{21}{2} =\right) = \dfrac{1}{3}v_n$.

Ceci montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2u_0 + 0 - \dfrac{21}{2} = -2 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{2}$.

b. • On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{25}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

• D'autre part $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2} \iff 2u_n = 3n - \dfrac{21}{2} - v_n \iff u_n = \dfrac{1}{2}\left(3n - \dfrac{21}{2} - v_n\right) = \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4} - \dfrac{25}{4} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

On peut vérifier ainsi que $u_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{21}{4} + \dfrac{25}{4} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = -\dfrac{15}{4} + \dfrac{25}{12} = -\dfrac{-45+25}{12} = -\dfrac{20}{12} = -\dfrac{5}{3}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

1. **a.** Somme de fonctions dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$, f est dérivable sur cet intervalle où :
$f'(x) = 0 + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$.
Comme $1+x > 0$ son inverse est lui aussi positif : $\dfrac{1}{1+x} > 0$, donc f est croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-1} 1+x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$.
D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
D'autre part $f(0) = 1 + \ln 1 = 1$.

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

a. Soit $x = -1 + h$, avec $h \in \mathbb{R}_+$.
Le taux d'accroissement de g au voisinage de -1 est $\dfrac{g(-1+h) - g(-1)}{-1+h-(-1)}$ et l'on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-1} \dfrac{g(-1+h) - g(-1)}{-1+h-(-1)} = g'(-1)$.

Or $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-1-x}{1+x} = \dfrac{-x}{1+x}$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to -1} -x = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1} 1+x = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to -1} \dfrac{-x}{1+x} = +\infty$.

b. En posant $u = 1+x$, on a $g(x) = g(u) = \dfrac{\ln u}{u}$ et l'on sait (puissances comparées que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} g(u) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

c. On a sur $]-1~;~+\infty[$, $\quad g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.

Comme $1+x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$, donc :

- Sur $]-1~;~0[$, $g'(x) > 0$: la fonction g est croissante
- Sur $]0~;~+\infty[$, $g'(x) < 0$: la fonction g est décroissante de $g(0) = 1$ à 0.
- $g(0) = 1$ est donc le maximum de la fonction sur $]-1~;~+\infty[$.

x	-1		α		0		β		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		0		$-$		
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d. On voit que sur l'intervalle $]-1~;~0[$, la fonction g continue car dérivable et croissante passe de valeurs négatives à $g(0) = 1 > 0$: le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $\alpha \in]-1~;~0[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Le même théorème sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ montre qu'il existe $\beta \in]0~;~+\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$.

Comme $g(2) = f(2) - 2 = 1 + 2\ln 3 - 2 = 2\ln 3 - 1 \approx 0,099$ et $g(3) = 1 + 3\ln 3 - 3 = 3\ln 3 - 2 \approx 3 \times 1,09 - 2 \approx -0,63$.

Le même théorème des valeurs intermédiaires montre que $2 < \beta < 3$. La fonction g représente pour une abscisse donné la différence entre les ordonnées des points de $\mathscr{C}_f$ et la droite (D).

e. Le tableau de variations montre que $g(x) > 0$ sur $]\alpha~;~\beta[$ autrement dit géométriquement : la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de (D) ; de même sur $]-1~;~\alpha[\cup]\beta~;~+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de (D).