∽ Corrigé du concours de contrôleur des douanes session 2019 ∾

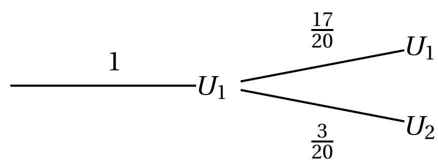
Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

février 2019 Durée : 3 heures

OPTION A : Mathématiques

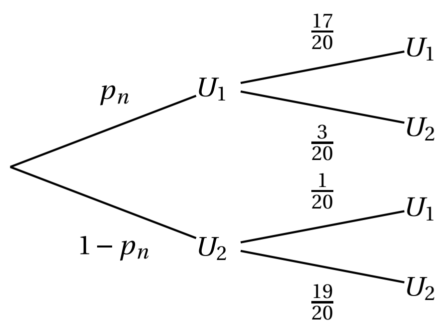
Exercice 1

1.



Donc $p_2 = \frac{17}{20}$.

2. Soit l'arbre pondéré suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$p_{n+1} = p_n \times \frac{17}{20} + (1 - p_n) \times \frac{1}{20} = \frac{17}{20} p_n - \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} p_n + \frac{5}{100} = \frac{80}{100} p_n + \frac{5}{100} = 0,8 p_n + 0,05.$

3. En appliquant la relation de récurrence précédente :

$p_3 = 0,8 p_2 + 0,05 = 0,8 \times \frac{17}{20} + 0,05 = \dfrac{13,6}{20} + 0,05 = \dfrac{68}{100} + 0,05 = 0,68 + 0,05 = 0,73.$

4. **a.** *Initialisation* : $p_1 = 1 \geqslant 0,25$: l'inégalité est vraie au rang 1.

hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que $p_n \geqslant 0,2$, alors $0,8 \times p_n \geqslant 0,8 \times 0,2$ ou $0,8 \times p_n \geqslant 0,16$ et enfin $0,8 \times p_n + 0,05 \geqslant 0,16 + 0,05$ ou encore $0,8 \times p_n + 0,05 \geqslant 0,21 > 0,20$, soit $p_{n+1} \geqslant 0,2$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang $n \geqslant 1$, elle l'est encore au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \geqslant 1$, on a $p_n \geqslant 0,2$.

b. Pour $n \geqslant 1$, on a $p_{n+1} - p_n = 0,8 p_n + 0,05 - p_n = -0,2 p_n + 0,05$.

Or $p_n \geqslant 0,25 \Longrightarrow 0,2 p_n \geqslant 0,2 \times 0,25 \iff 0,2 p_n \geqslant 0,05 \iff -0,2 p_n \leqslant -0,05 \Longrightarrow -0,2 p_n + 0,05 \leqslant -0,05 + 0,05 \iff p_{n+1} - p_n \leqslant 0$: la suite (p_n) est donc décroissante

c. ℓ. La site (p_n) est décroissante et minorée par 0,2, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0,2$.

d. Par continuité le nombre ℓ vérifie l'égalité $\ell = 0,8\ell + 0,05 \iff 0,2\ell = 0,05 \iff 5 \times 0,2\ell = 5 \times 0,05$, soit $\ell = 0,25$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln x$$

où lnx est le logarithme népérien de x.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

1. Le but est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les deux droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
On note M et N les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.

a. Somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, f est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.
Or $\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1$ et par croissance de la fonction exponentielle : $\text{e}^{\ln x} = x = \text{e}^{-1} = \dfrac{1}{\text{e}}$.
On a de même $f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \dfrac{1}{\text{e}}$.
Donc $f'(x) > 0$ sur $]]\text{e}^{-1}~;~+\infty[$. La fonction f est croissante sur cet intervalle.
De la même façon on montre que f est décroissante sur $]0~;~\text{e}^{-1}[$.
Le point de coordonnées $\left(\text{e}^{-1}~;~f\left(\text{e}^{-1}\right)\right)$ est le minimum de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
Or $f\left(\text{e}^{-1}\right) = 1 + \text{e}^{-1} \times \ln\left(\text{e}^{-1}\right) = 1 + \text{e}^{-1} \times (-1) = 1 - \text{e}^{-1} \approx 0,632$.
Le minimum étant supérieur à zéro, ceci montre que la fonction f est positive (strictement) sur $]0~;~+\infty[$.

b. $f(1) = 1 + 1 \times \ln 1 = 1$, donc M$(1~;~1)$.
$f(2) = 1 + 2\ln 2$, donc N$(2~;~1 + 2\ln 2)$.
Donc $\overrightarrow{\text{MN}}(1~;~2\ln 2)$ est un vecteur directeur de la droite (MN). Le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Il faut donc trouver les solutions de l'équation $f'(x) = 2\ln 2$.
Or f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 = 1 + \ln x$. L'équation à résoudre dans $]0~;~+\infty[$ est donc :
$f'(x) = 2\ln 2 \iff 1 + \ln x = 2\ln 2 \iff \ln x = \ln 4 - 1 \iff \ln x = \ln 4 - \ln \text{e} = \ln\dfrac{4}{\text{e}} \iff x = \dfrac{4}{\text{e}}$. Donc E est bien le seul point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente à la courbe est parallèle à la droite (MN).

d. On sait que $X(x~;~y) \in T \iff y - f\left(\frac{4}{\text{e}}\right) = f'\left(\frac{4}{\text{e}}\right)\left(x - \frac{4}{\text{e}}\right)$.
On a $f\left(\dfrac{4}{\text{e}}\right) = 1 + \dfrac{4}{\text{e}}\ln\dfrac{4}{\text{e}} = 1 + \dfrac{4}{\text{e}}(\ln 4 - \ln \text{e}) = 1 + \dfrac{4}{\text{e}}(2\ln 2 - 1) = \dfrac{\text{e} + 8\ln 2 - 4}{\text{e}}$.
On a vu que $f'\left(\frac{4}{\text{e}}\right) = 2\ln 2$ (ou $\ln 4$), donc :
$X(x~;~y) \in T \iff y - \dfrac{\text{e} + 8\ln 2 - 4}{\text{e}} = 2\ln 2\left(x - \frac{4}{\text{e}}\right)$, soit encore
$X(x~;~y) \in T \iff y = x\ln 4 + \dfrac{\text{e} + 8\ln 2 - 4}{\text{e}} - 8\dfrac{\ln 2}{\text{e}} \iff y = x\ln 4 + 8\dfrac{\ln 2}{\text{e}} + 1 - 8\dfrac{\ln 2}{\text{e}} - \dfrac{4}{\text{e}}$.

Finalement : $X(x\,;\,y) \in T \iff y = (2\ln 2)x + 1 - \dfrac{4}{\text{e}}$.

2.

$$g(x) = f(x) - (2\ln 2)x + 4\text{e} - 1.$$

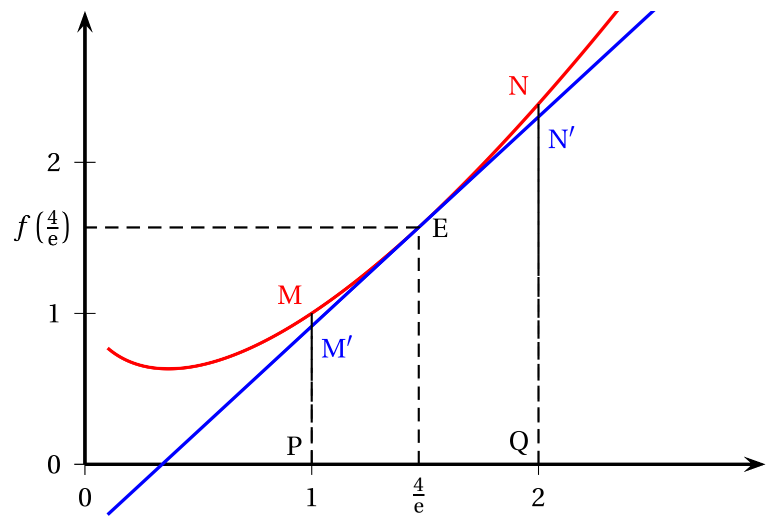
a. On a $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1 + \ln x - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln \dfrac{x}{4}$.

b. Signe de $g'(x)$:

- $g'(x) > 0 \iff 1 + \ln\dfrac{x}{4} > 0 \iff 1 > -\ln\frac{x}{4} \iff 1 > \ln\frac{4}{x} \iff \ln\text{e} > \ln\frac{4}{x} \iff \text{e} > \frac{4}{x} \iff x > \frac{4}{\text{e}}$. Or $\frac{4}{\text{e}} \approx 1,472$: la fonction g est croissante sur $\left[\dfrac{4}{\text{e}}\,;\,2\right]$;
- $g'(x) < 0 \iff 1 + \ln\dfrac{x}{4} < 0 \iff 1 < -\ln\frac{x}{4} \iff 1 < \ln\frac{4}{x} \iff \ln\text{e} < \ln\frac{4}{x} \iff \text{e} < \frac{4}{x} \iff x < \frac{4}{\text{e}}$: la fonction g est décroissante sur $\left[1\,;\,\dfrac{4}{\text{e}}\right]$;
- $g'(x) = 0 \iff x = \frac{4}{\text{e}}$.

Pour $x \in [1\,;\,2]$, $g(x)$ est la différence entre le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et le point de la tangente en E à cette même courbe. Les résultats précédents signifient géométriquement que la tangente est sous la courbe si $x \in \left[1\,;\,\dfrac{4}{\text{e}}\right]$, qu'elle est au dessus de la courbe si $x \in \left[\dfrac{4}{\text{e}}\right]$ et que $\mathscr{C}$ et T ont le point E en commun.

Figure :



3.

a. • On a PM $= f(1) = 1$, QN $= f(2) \approx 2,386$ et PQ $= 1$.

Donc $\dfrac{(\text{PM}' + \text{QN}') \times \text{PQ}}{2} = \frac{(1+2,386)\times 1}{2} \approx 1,693$.

• Avec $y = (2\ln 2)x + 1 - \dfrac{4}{\text{e}}$, on a PM$' = y(1) = (2\ln 2) + 1 - \dfrac{4}{\text{e}} \approx 0,915$, QN$' = 4\ln 2 + 1 - \dfrac{4}{\text{e}} \approx 2,301$ et PQ $= 1$.

Donc $\dfrac{\text{PM}' + \text{QN}') \times \text{PQ}}{2} = \frac{(0,915+2,301)\times 1}{2} \approx 1,608$.

b. D'après la question précédente, on a $1,608 < \mathscr{A} < 1,693$ soit $1,6 < \mathscr{A} < 1,7$ au dixième près.

4. Le but est de déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

a. On a $\left\{\begin{array}{l l} u' = x & v = \ln x\\ u = \dfrac{x^2}{2} & v' = \dfrac{1}{x}\end{array}\right.$. En intégrant par parties on a donc :
$\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 - (\frac{1}{2}\times\ln 1 - \frac{1}{4}) =$
$2\ln 2 - 1 + \dfrac{1}{4} = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$.

b. On a $\mathscr{A} = 1 + 2\ln 2 - \dfrac{3}{4} = 2\ln 2 + \dfrac{1}{4}$ (environ 1,636 29 qui est bien entre 1,6 et 1,7)

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. f est définie si $x + 3 > 0 \iff x > -3$, donc f est définie et dérivable $(x + 3 \neq 0)$ sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x+3}\times(x+3) - 1\times\ln(x+3)}{(x+3)^2} = \dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$.
Comme $(x+3)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-\ln(x+3)$, donc
• $1-\ln(x+3) > 0 \iff \ln(x+3) < 1 \iff \ln(x+3) < \ln \mathrm{e} \iff x + 3 < \mathrm{e} \iff x < \mathrm{e} - 3 \approx -0,28$, donc $\mathrm{e} - 3 \neq [0~;~+\infty[$, donc
• $1-\ln(x+3) < 0 \iff x > \mathrm{e} - 3$, soit ici $x \geqslant 0$: la fonction f est décroissante sur son intervalle de définition.
On a $f(0) = \dfrac{\ln 3}{3}$ et en posant $x + 3 = u$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u} = 0$ par comparaison comparée.
On peut donc en conclure que f est décroissante et strictement positive.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. On a $n \leqslant x \leqslant n+1 \Longrightarrow f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$ par décroissance de la fonction f.

b. D'après la question précédente : $n \leqslant t \leqslant n+1 \Longrightarrow f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n) \Longrightarrow$
$\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \iff$
$(n+1-n)f(n+1) \leqslant u_n \leqslant (n+1-n)f(n) \iff f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$ car si les trois fonctions sont positives et rangées dans un certain ordre, leurs intégrales sont rangées dans le même ordre.

c. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$, on en déduit (théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\ to+\infty} u_n = 0$.

3. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a. F est la composée de trois fonctions $x \longmapsto x+3$, $\quad t \longmapsto \ln t$ et $u \longmapsto u^2$ toutes dérivables sur $]0~;~+\infty[$; F est donc dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et
$F'(x) = 2\times\ln(x+3)\times\dfrac{1}{x+3} = 2\dfrac{\ln(x+3)}{x+3} = 2f(x)$.

b. On a vu que $F'(x) = 2f(x)$ sur $[0~;~+\infty[$ ou $f(x) = \dfrac{1}{2}F'(x)$, donc :

$I_n = \displaystyle\int_0^n \dfrac{1}{2}F'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_0^n F'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}[F(x)]_0^n = \dfrac{1}{2}(F(n) - F(0)) =$

$I_n = \dfrac{1}{2}\left([\ln(n+3)]^2 - [\ln 3]^2\right)$.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.

$S_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale.

Donc $S_n = \displaystyle\int_0^n \dfrac{1}{2}F'(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_0^n F'(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}[F(n) - F(0)] = \dfrac{1}{2}\left[[\ln(n+3)]^2 - [\ln 3]^2\right]$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} [\ln(n+3)]^2 = +\infty$, la suite (S_n) n'est pas convergente.