# ∽ Concours contrôleur des douanes session 2020 ∾

## Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

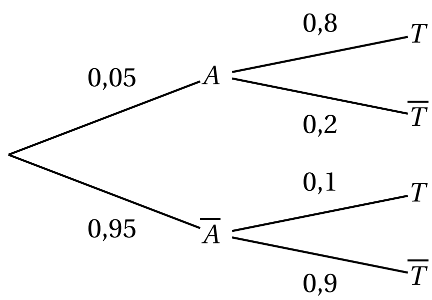
février 2020 Durée : 3 heures

**OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques**

**Remarque préliminaire :**
**– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.**
**– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.**

### Exercice 1

**1.**




**2.** **a.** D'après la loi des probabilités totales :
$p(T) = p(A \cap T) + p\left(\overline{A} \cap T\right) = 0,05 \times 0,8 + 0,95 \times 0,1 = 0,04 + 0,095 = 0,135.$

**b.** Le test est erroné si le test est négatif pour une personne porteuse et s'il est positif pour une personne non porteuse, donc :
$p(\text{erroné}) = p\left(A \cap \overline{T}\right) + p\left(\overline{A} \cap T\right) = 0,05 \times 0,2 + 0,95 \times 0,1 = 0,01 + 0,095 = 0,105.$

### Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

**Partie A**

**1.** Soit $g$ la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

Somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$.
• $-1 + \mathrm{e}^x > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > \ln 1 \iff x > 0$ : la dérivée est positive donc la fonction $g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ ;

- $-1+\mathrm{e}^x<0 \iff \mathrm{e}^x<1 \iff x<\ln 1 \iff x<0$ : la dérivée est négative donc la fonction $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ ;
- $-1+\mathrm{e}^x=0 \iff x=0$ et $g(0)=1+1=2$.

Le point de coordonnées $(0\,;2)$ est le minimum de $g$ sur $\mathbb{R}$.

Cette étude montre que $g(x)\geqslant 2>0$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** • Limite en $-\infty$ : $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=+\infty$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$;

• Limite en $+\infty$On sait (croissance comparée) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

**3.** Somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x)=1+\dfrac{1\times\mathrm{e}^x-x\times\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=1+\dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}=1+\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

On peut écrire :

$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\times(1-x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x+1-x\right)=\mathrm{e}^{-x}g(x)$.

**4.** On a vu que $g(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ et par conséquent on a aussi $f'(x)>0$, donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de moins l'infini à plus l'infini.

**5.** La fonction $f$ est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$; étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de moins l'infini à plus l'infini, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ a une seule solution $\alpha\in\mathbb{R}$, telle que $f(\alpha)=0$.

**6.** On a $M(x\,;\,y)\in(T) \iff y-f(0)=f'(0)(x-0)$

Avec $f(0)=1$ et $f'(0)=1+1=2$, on obtient :

$M(x\,;\,y)\in(T) \iff y-1=2x \iff y=2x+1$.

On admettra pour la suite que $T$ est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie B**

**1.** Soit $H$ la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

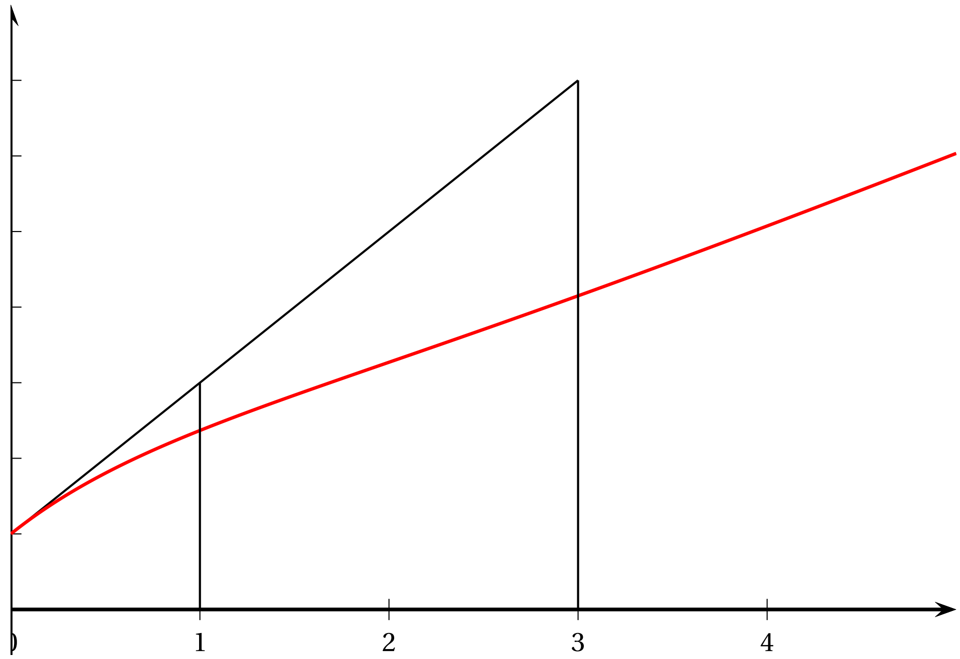
$$H(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction $H$ est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$H'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+(x+1)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(-1+x+1)=x\mathrm{e}^{-x}=h(x)$.

Conclusion $h$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h$.

**2.** On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $T$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$.




Puisqu'il est admis que $T$ est au-dessus de $\mathscr{C}$, on a :
$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \displaystyle\int_1^3 (2x+1)\,\text{d}x - \int_1^3 f(x)\,\text{d}x = \int_1^3 (2x+1) - \left(x+1+\dfrac{x}{\text{e}^x}\right) = \int_1^3 \left(x - x\text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x = \int_1^3 (x-h(x))\,\text{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2} - H(x)\right]_1^3 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2} - H(3) + H(1) = 4 + 4\text{e}^{-3} - 2\text{e}^{-1} \approx 3,46$ (unités d'aire).

## Exercice 3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points

$$\text{A}(0;4;1),\qquad \text{B}(1;3;0),\qquad \text{C}(2\,;\,-1\,;\,-2)\quad \text{et}\quad \text{D}(7\,;\,-1\,;\,4)$$

**1.** **a.** $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$.

**b.** Les vecteurs précédents ne sont manifestement pas colinéaires donc les points ne sont ni confondus ni alignés : ils définissent donc un plan.

**2.** **a.** On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 2+1-3 = 0$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 4+5-9 = 0$ : le vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan

**b.** On sait qu'alors :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 2x - y + 3z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Ainsi par exemple $\text{A}(0\,;\,4\,;\,1) \in (\text{ABC}) \iff 2\times 0 - 4 + 3 + d = 0 \iff d = 1$, donc finalement :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 2x - y + 3z + 1 = 0$

**c.** $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}/, \overrightarrow{\text{D}M} = t\,\overrightarrow{u} \iff$
$$\left\{\begin{array}{ll} x-7 & = 2t\\ y+1 & = -1t\\ z-4 & = 3t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & = 2t+7\\ y & = -1t-1\\ z & = 3t+4\end{array}\right.$$

**3.** Soit $P_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $P_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

**a.** $P_1$ a un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ; $P_2$ a un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles ; ils sont sécants selon une droite $(d)$.

On admettra pour la dernière question que la droite $d$, intersection des plans $P_1$ et $P_2$, a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c c}x &=& -4t-2\\ y &=& t\\ z &=& 3t+2\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

**b.** Parallèles ?

Si $d$ est parallèle au plan (ABC) un de ses vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ normal au plan (ABC).

Avec $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=2\times(-4)-1\times1+3\times3=-8-1+9=0$.

Conclusion $d$ est parallèle au plan (ABC).

## Exercice 4

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite $(u_n)$ où $u_n$ désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$.
En 2010, la forêt possède 50 000 arbres.
Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

**1.** Retire 5 % c'est multiplier par $1-\dfrac{5}{100}=\dfrac{95}{100}=0,95$.

On passe donc de $u_n$ à $u_{n+1}$ en multipliant $u_n$ par 0,95 et en ajoutant 3 (milliers) d'arbres soit :

$$u_{n+1}=0,95u_n+3.$$

**2.** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n=60-u_n$.

**a.** On a $v_{n+1}=60-u_{n+1}=60-(0,95u_n+3)=57-0,95u_n=0,95\left(\dfrac{57}{0,95}-u_n\right)=0,95(60-u_n)=095v_n$.

L'égalité vraie pour tout naturel $n$, $\quad v_{n+1}=0,95v_n$ montre que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0=60-u_0=60-50=10$.

**b.** On sait qu'alors quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times q^n$, $q$ étant la raison de la suite, soit ici $v_n=10\times0,95^n$.

**c.** Or quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $v_n=60-u_n \iff u_n=60-v_n=60-(10\times0,95^n)=60-10\times0,95^n$.

**3.** Comme $0<0,95<1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}0,95^n=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}10\times0,95^n=0$ et finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=60.$$