∽ Concours contrôleur des douanes ∾
session 2020

OPTION A : Mathématiques

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie pour tout $x > 3$ par

$$f(x) = \ln(2x-6),$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie I

1.
   - Limite en 3 .

   $\displaystyle\lim_{x\to 3} 2x-6 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 3} \ln(2x-6) = -\infty$.
   Géométriquement ceci signifie que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$
   - Limite en plus l'infini

   $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2x-6 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 3} \ln(2x-6) = +\infty$.
2. Composée de fonction dérivables sur $]3\,;\ +\infty[$, la fonction f est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{2}{2x-6} = \dfrac{1}{x-3}$.
   Comme $x > 3 \iff x-3 > 0$, on a $f'(x) > 0$ sur $]3\,;\ +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $]3\,;\ +\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point A d'ordonnée nulle or $f(x) = 0 \iff \ln(2x-6) = 0 \iff \ln(2x-6) = \ln 1 \iff 2x-6 = 1 \iff 2x = 7 \iff x = \dfrac{7}{2}$. Donc $\text{A}\left(\dfrac{7}{2}\,;\ 0\right)$.
4. On a $M(x\,;\ y) \in T \iff y - y_\text{A} = f'(x_\text{A})\,(x - x_\text{A})$, soit
   $M(x\,;\ y) \in T \iff y - 0 = \dfrac{1}{\frac{7}{2}-3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$ ou
   $M(x\,;\ y) \in T \iff y = 2\left(x - \frac{7}{2}\right) \iff y = 2x-7$.

Partie II

1. Pour tout point $M(x\,;\ y) \in \mathscr{C}_f$, avec $y = \ln(2x-6)$, son symétrique $M'(x'\,;\ y')$ est tel que ses coordonnées sont celles de M inversées, soit $M'(y = \ln(2x-6)\,;\ x)$.
   Or pour $x > 3$, alors $\text{e}^y = 2x-6 \iff \text{e}^y + 6 = 2x \iff x = \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^y + 6\right) \iff x = \dfrac{1}{2}\text{e}^y + 3$.
   On a donc $g(x) = 3 + \dfrac{1}{2}\text{e}^x$ définie elle sur $\mathbb{R}$.
2. On a $g(3) = 3 + \dfrac{1}{2}\text{e}^3$.
   Si $\text{E}\left(3\,;\ 3 + \dfrac{1}{2}\text{e}^3\right)$, alors son symétrique autour de D est $\text{E}'\left(3 + \dfrac{1}{2}\text{e}^3\,;\ 3\right)$.

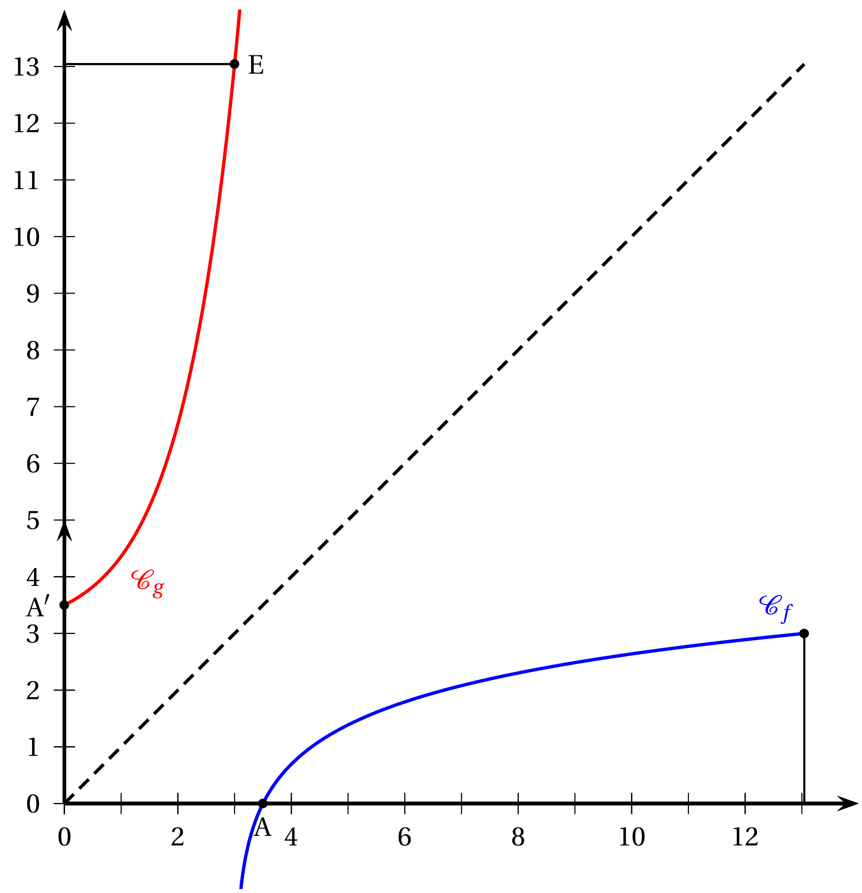
3. La fonction $x \longmapsto g(x) = 3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto G(x) = 3x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

Donc $\displaystyle\int_0^3 \left(3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}x\right)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^3 = G(3) - G(0) = \left[3x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right] - \left[3x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right] =$

$9 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 = \frac{17}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^3$.

4. On a $3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \geqslant 3$ (car on sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$), d'où $3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x > 0$: la fonction g étant positive l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E est égale à l'intégrale de la question 3. soit $\frac{17}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^3$

5. Le dessin parle de lui-même.



Exercice n° 2

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \\ b_{n+l} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1. On a $a_0 = \frac{1}{4}(12+2) = \frac{7}{2}$; $b_0 = \frac{1}{4}(4+6) = \frac{5}{2}$;

$a_1 = \frac{13}{4}$; $b_1 = \frac{11}{4}$

$a_2 = \dfrac{25}{8}$; $\quad b_2 = \dfrac{23}{8}$

2. Soit u_n la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = a_n + b_n$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n + a_n + 3b_n) = \dfrac{1}{4}(4a_n + 4b_n) = \dfrac{1}{4} \times 4(a_n + b_n) = a_n + b_n$.

La suite (u_n) est constante ; tous les termes sont égaux à $u_0 = a_0 + b_0 = 4 + 2 = 2$.

b. L'abscisse du milieu de $[A_{n+1}B_{n+1}]$ est égale à :
$\dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \dfrac{u_{n+1}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Tous les segments $[A_nB_n]$ ont pout milieu le point I d'abscisse 3.

3. On considère la suite réelle v_n définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = b_n - a_n$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = b_{n+1} + a_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n) - \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n) = \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n - 3a_n - b_n)\dfrac{1}{4}(2b_n - 2a_n) = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$: la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = b_0 - a_0 = 2 - 4 = -2$.

b. La distance A_nB_n est égale à $|b_n - a_n| = |u_n|$.

Or $u_n = u_0 \times r^n$, r étant la raison de la suite géométrique, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Ici $v_n = -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ou $-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$.

La distance $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ tend vers zéro

4. On a démontré que $\begin{cases} v_n = b_n - a_n &= -\dfrac{1}{2^{n-1}} \\ u_n = b_n + a_n &= 6 \end{cases}$

Par somme on obtient : $2b_n = 6 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \iff b_n = 3 - \dfrac{1}{2^n}$, puis

$a_n = 6 - b_n = 6 - 3 + \dfrac{1}{2^n} = 3 + \dfrac{1}{2^n}$.

$$a_n = 3 + \frac{1}{2^n}, \qquad b_n = 3 - \frac{1}{2^n}.$$

5. Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 3.$$

Exercice n° 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $2x + y - z + 7 = 0$ et les points $\mathrm{A}(4\,;\ 1\,;\ -2)$, $\mathrm{B}(-3\,;\ 1\,;\ 2)$ et $\mathrm{C}(-1\,;\ 3\,;\ 1)$.

1. On a $M(x\,;\ y\,;\ z) \in (P) \iff 2x + y - z + 7 = 0$ et
$\mathrm{B}(-3\,;\ 1\,;\ 2) \in (P) \iff -6 + 1 - 2 + 7 = 0$ qui est vraie, donc $\mathrm{B} \in (P)$.

La droite (BC) contient B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{BC}) \iff \overrightarrow{\text{B}M} = t\overrightarrow{\text{BC}}$, avec $t \in \mathbb{R}$. ce qui se traduit par le système :
$$\left\{\begin{array}{r c l} x+3 &=& 2t\\ y-2 &=& 2t\\ z-2 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r c l} x &=& -3+2t\\ y &=& 2+2t\\ z &=& 2-\ t\end{array}\right.$$

2. Puisque $\overrightarrow{\text{BC}}$ est un vecteur normal au plan (Q), on sait qu'une équation de (Q) est de la forme
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (Q) \iff 2x+2y-z+d=0$. Or
$\text{A}(4\,;\,1\,;\,-2) \in (Q) \iff 2\times 4+2\times 1-(-2)+d=0 \iff 8+2+2+d=0 \iff d=-12$.
Finalement $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (Q) \iff 2x+2y-z-12=0$.

3. Le plan (P) a un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Donc
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\Delta) \iff \overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{n},\quad t \in \mathbb{R}$ ce qui se traduit par le système :
$$\left\{\begin{array}{r c l} x-4 &=& 2t\\ y-1 &=& 1t\\ z+2 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r c l} x &=& 4+2t\\ y &=& 1+1t\\ z &=& -2-t\end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

4. • Si R est le projeté orthogonal de A sur (P), le vecteur $\overrightarrow{\text{AR}}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan (P).
Avec $R(x\,;\,y\,;\,z)$, on a donc $\overrightarrow{\text{AR}}\begin{pmatrix}x-4\\y-1\\z+2\end{pmatrix}$.
Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{AR}} = \alpha\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{r c l} x-4 &=& 2\alpha\\ y-1 &=& 1\alpha\\ z+2 &=& -\alpha\end{array}\right. \iff$
$$\left\{\begin{array}{r c l} x &=& 4+2\alpha\\ y &=& 1+\alpha\\ z &=& -2-\alpha\end{array}\right.$$
D'autre part $\text{R}(x\,;\,y\,;\,z) \in (P) \iff 2x+y-z+7=0$ et en remplaçant x, y z par leurs valeurs en fonction de α, on obtient :
$2(4+2\alpha)+1+\alpha-(-2-\alpha)=0 \iff 8+2\alpha+1+\alpha+2+\alpha+7=0 \iff 6\alpha+18=0 \iff 6\alpha=-18 \iff \alpha=-3$.
Finalement $x=4+2\times(-3)=4-6=-2$; $y=1+(-3)=-2$ et $z=-2+3=1$.
$\text{R}(-2\,;\,-2\,;\,1)$.

Exercice n° 4

Une urne contient 3 boules bleues et n boules blanches (n étant un entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée.

Partie I

On tire successivement 3 boules avec remise et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées.

1. Il y a 3 boules bleues et en tout $3+n$ boules.
Il y a à chaque tirage une probabilité $\dfrac{3}{3+n}$ de tirer une boule bleue.

La variable X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n=3,\, p=\dfrac{3}{3+n}\right)$.

Pour k allant de 0 à 3, on a donc $p(X=k)=\binom{3+n}{k}\left(\dfrac{3}{3+n}\right)^{k}\times\left(\dfrac{n}{3+n}\right)^{3-k}$.

On obtient la loi de probabilité suivante :

X	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\dfrac{n^3}{(3+n)^3}$	$\dfrac{9n^2}{(3+n)^3}$	$\dfrac{27n}{(3+n)^3}$	$\dfrac{27}{(3+n)^3}$

2. On a $E(X)=\dfrac{n^3}{(3+n)^3}\times 0+\dfrac{9n^2}{(3+n)^3}\times 1+\dfrac{9n^2}{(3+n)^3}\times 2+\dfrac{27}{(3+n)^3}\times 3=\dfrac{9n^2+54n+81}{(n+3)^3}$.

Il faut résoudre l'équation :

$E(X)=1,5 \iff \dfrac{9n^2+54n+81}{(n+3)^3}=\dfrac{3}{2} \iff \dfrac{3n^2+18n+27}{(n+3)^3}=\dfrac{1}{2} \iff$

$2\left(3n^2+18n+27\right)=(3+n)^3 \iff 6n^2+36n+54=n^3+9n^2+27n+27 \iff$

$n^3+3n^2-9n-27=0 \iff \left(n^3-9n\right)+3n^2-27=0 \iff n\left(n^2-9\right)+3\left(n^2-9\right)=0 \iff$

$\left(n^2-9\right)(n+3)=0 \iff (n+3)(n-3)(n+3)=0$.

La solution $n+3=0$ n'est pas possible ; il reste $n-3=0 \iff n=3$.

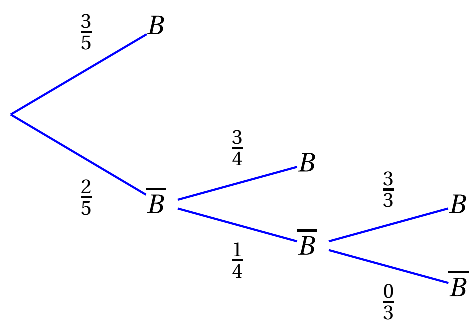
Avec 3 boules bleues et 3 boules blanches on tirera en moyenne 1,5 boule bleue pour trois tirages ce qui est vraisemblable.

Partie II

Pour la suite de l'exercice on considère que $n=2$.

On effectue un tirage successif et sans remise des 5 boules de l'urne. On désigne par Z la variable aléatoire égale au rang de la première boule bleue tirée.

Arbre des probabilités pondéré :



1. On a $p(Z=1)=\dfrac{3}{5}$, $\quad p(Z=2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{10}$, $\quad p(Z=3)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{3}=\dfrac{1}{10}$.

2. On a $E(Z)=\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{6}{10}+\dfrac{6}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{15}{10}=1,5$.

$V(Z)=\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{6}{10}-\dfrac{15}{10}\right)^2+\left(\dfrac{3}{10}-\dfrac{15}{10}\right)^2+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{15}{10}\right)^2\right]=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{81}{100}+\dfrac{144}{100}+\dfrac{196}{100}\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{440}{100}=$
$\dfrac{440}{300}\approx 1,47$.