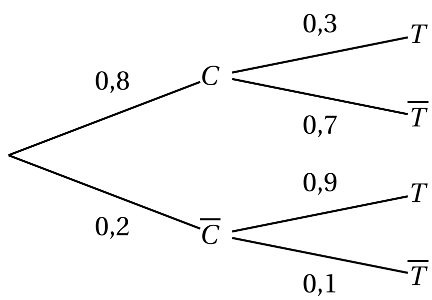
∽ Contrôleur des douanes : 25 février 2015 ∾
Option surveillance

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire : Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice n° 1

1.



2. On a $p(T\cap C) = p(C\cap T) = p(C)\times p_C(T) = 0,8\times 0,3 = 0,24$.

3. On a de même $p\left(T\cap\overline{C}\right) = p\left(\overline{C}\right)\times p_{\overline{C}}(T) = 0,2\times 0,9 = 0,18$.
D'aprè la loi des probabilités totales :
$p(T) = p(T\cap C) + p\left(T\cap\overline{C}\right) = 0,24+0,18 = 0,42$.

4. Il faut trouver $p_T\left(\overline{C}\right) = \dfrac{p\left(T\cap\overline{C}\right)}{p(T)} = \dfrac{0,18}{0,42} = \dfrac{18}{42} = \dfrac{6\times 3}{6\times 7} = \dfrac{3}{7} \approx 0,429$.

5. $X = 0$: le terrain n'est pas occupé avec $p\left(T\right) = 1 - p(T) = 1 - 0,42 = 0,58$.
Le terrain est occupé en heure creuse : $p(C\cap T) = 0,24$, la recette est $X = 5$;
Le terrain est occupé en heure pleine : $p\left(\overline{C}\cap T\right) = 0,18$, la recette est $X = 12$.
D'où le tableau de la loi :

X	0	5	12
$p(X=)$	0,58	0,24	0,12

6. On a $E(X) = 0\times 0,58 + 5\times 0,24 + 12\times 0,12 = 1,2 + 1,44 = 2,64$.
La recette horaire moyenne d'un court est de 2,64 €.

7. Pour 12 courts et 60 heures de location, la recette moyenne est donc de 1 900,80 €.

$$12\times 2,64\times 60 = 1\,900,80\ (€).$$

Exercice n° 2

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x) & = & -4x^2+8x & \text{pour} & x\in[0\ ;\ 1]\\ f(x) & = & \ln x - x + 5 & \text{pour} & x\in[1\ ;\ 5]\end{array}\right.$$

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. • Sur $[0~;~1]$, $f(x) = -4x^2+8x = 4x(-x+2)$; $f(x)$ est un trinôme de racines 0 et 2.
   On sait que f est croissante de 0 à $\dfrac{0+2}{2} = 1$, puis décroissante son signe est celui de $a = -4$ donc négatif sauf entre les racines.
   Ou encore sur $[0~;~1]$, $f(x) =)4x^2+8x$, donc $f'(x) = -8x+8$ et alors $f'(x) \geqslant 0 \iff -8x+8 \geqslant 0 \iff 8 \geqslant 8x \iff 1 \geqslant 1$: f est donc croissante sur $[0~;~1]$.
   • Sur $[1~;~5]$, $f(x) = \ln x - x + 5$; f est dérivable sur cet intervalle et
   $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ qui est du signe de $1-x$ puisque $x \geqslant 1 > 0$.
   Or $1 - x \leqslant 0 \iff x \geqslant 1$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1~;~5]$.
2. Sur $[0~;~1]$, une primitive F de f est définie par :
   $F(x) = -4\dfrac{x^3}{3} + 4x^2$.
3. L'aire limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à :
   $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -4\frac{1^3}{3} + 4\times 1^2 - 0 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.
4.
$$g(x) = \ln x \quad \text{et} \quad G(x) = x\ln x - x,$$
   montrez que G est une primitive de g sur $[1~;~5]$.
   G est dérivable sur $[1~;~5]$ et sur cet intervalle : $G'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = g(x)$, donc G est une primitive de g sur $[1~;~5]$.
5. L'aire limitée par les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$ est donc égale à
   $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 (\ln x - x + 5)\,\mathrm{d}x =$
   $\displaystyle\left[x\ln x - x - \frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^5 = 5\ln 5 - 5 - \frac{5^2}{2} + 5\times 5 - \left(\ln 1 - 1 - \frac{1^2}{2} + 5\times 1\right) = 5\ln 5 + 20 - \frac{25}{2} - \left(-1 - \frac{1}{2} + 5\right) = 5\ln 5 + \frac{15}{2} - \frac{7}{2} = 5\ln 5 + \frac{20}{3}$. soit avec $\ln 5 \approx 1{,}609\,44$, l'aire est environ $14{,}714$ soit $14\,714$ messages envoyés pendant les 5 minutes.
6. Avec $\ln 5 \approx 1{,}609\,44$, l'intégrale précédente est égale environ à $14{,}714$ soit $14\,714$ messages envoyés pendant les 5 minutes.
7. La valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0~;~5]$ est égale à :
   $\displaystyle\frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ soit environ $\dfrac{14{,}714}{5} = 2{,}942\,8$ soit environ $2\,943$ messages.
   Ceci signifie que le débit des messages sera en moyenne environ $2\,943$ messages par minute.

Exercice n° 3

On considère (u_n) et (v_n),deux suites définies par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6$$

1. • Arithmétique ?
   Calculons $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + 6 - u_n = \dfrac{1}{2}u_n - 3 + 6 - u_n = 3 - \dfrac{1}{2}u_n$.

Or $u_0 = 9$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 - 3 = \dfrac{9}{2} - 3 = \dfrac{3}{2}$: la suite (u_n) n'est pas constante, la différence $v_{n+1} - v_n$ non plus donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

- Géométrique ?

$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \dfrac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \dfrac{1}{2}u_n + 3 = \dfrac{1}{2}(u_n + 6) = \dfrac{1}{2}v_n$

L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$, vraie pour tout naturel montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 9 + 6 = 15$.

2. On a $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ (1) et en multipliant par $\dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{2}S_n = \dfrac{1}{2}v_0 + \dfrac{1}{2}v_1 + \ldots + \dfrac{1}{2}v_n$, soit

$\dfrac{1}{2}S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + v_{n+1}$ (2).

Par différence entre les lignes (1) et (2), on obtient :

$\dfrac{1}{2}S_n = v_0 - v_{n+1}$.

Or on sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{15}{2^n}$, donc

$\dfrac{1}{2}S_n = 15 - \dfrac{15}{2^{n+1}} = 15\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Finalement $S_n = 30\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Comme $v_n = u_n + 6 \iff u_n = v_n - 6$, on obtient :

$S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + (n+1) \times 6 = S_n + 6(n+1) = 30\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) + 6(n+1)$.

3. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 30$.

Par contre comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 6(n+1) = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S'_n = +\infty$.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \ln\frac{1}{2}$ où $-\ln 2$.

L'égalité $w_{n+1} - w_n = -\ln 2$, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 2$ de premier terme $w0 = \ln v_0 = \ln 15$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n = w_0 + (n+1)(-\ln 15)$.

5. $S''_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ et

$S''_n = w_n + w_{n-1} + \ldots + w_1 + w_0$: en sommant et en divisant par 2 le résultat, on obtient :

$S''_n = \dfrac{n+1}{2}\ln\dfrac{15^2}{2^n}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{15^2}{2^n} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\dfrac{15^2}{2^n} = -\infty$ et enfin par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S''_n = -\infty$.

6. On a $w_n = \ln(v_n) \iff \mathrm{e}^{w_n} = v_n$, donc

$P_n = v_0 v_1 \ldots v_n = \mathrm{e}^{w_0}\mathrm{e}^{w_1}\ldots\mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{w_0 + w_1 + \ldots + w_n} = \mathrm{e}^{S''_n} = \mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}\ln\frac{225}{2^n}} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{225}{2^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \left(\dfrac{225}{2^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$.

De $P_n = \text{e}^{S''_n}$ et compte tenu du fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S''_n = -\infty$, on a
$\displaystyle\lim_{\to+\infty} P_n = 0$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 4

Le raisonnement d'Alexandre est erroné car il ne considère que les cas où les deux premières faces lues sont identiques et il ignore les quatre issues où le résultat est PF ou FP.
Chacune des huit issues PPP,PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF a la même probabilité
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$, donc :
$p(\text{PPP ou FFF}) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$.