Concours contrôleur des douanes
Branche surveillance 21 février 2018

Remarque préliminaire :

— Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

— Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice n° 1 :

1. Soit U_n le nombre de clients (en millions) de la société « Voyage » au 1er janvier de l'année $2018+n$. On déduit de l'énoncé que $U_0 = 4$.

a. Retrancher 20 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$.

On passe de U_1 à U_2 en multipliant U_1 par 0,8 puis en ajoutant $0,2(20 - U_1)$.

Donc $U_2 = 0,8U_1 + 4 - 0,2U_1 = 0,6U_1 + 4 = 0,6 \times 4 + 4 = 2,4 + 4 = 6,4$. (millions)

b. De même on passe de U_n à U_{n+1} en multipliant U_n par 0,8 puis en ajoutant $0,2(20 - U_n)$.

Donc $U_{n+1} = 0,8U_n + 0,2(20 - U_n) = 0,8U_n + 4 - 0,2U_n = 0,6U_n + 4$.

2. a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad V_{n+1} = U_{n+1} - 10 = 0,6U_n + 4 - 10 = 0,6U_n - 6 = 0,6\left(U_n - 10\right) = 0,6V_n$.

Ceci montre que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,6.

b. $V_0 = U_0 - 10 = 4 - 10 = -6$.

c. On sait que quel que soit le naturel n, $\quad V_n = V_0 \times q^n$, q étant la raison de la suite, donc :

$V_n = -6 \times 0,6^n$.

d. $V_n = U_n - 10 \iff U_n = V_n + 10 = 10 - 6 \times 0,6^n$.

$$\text{Quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad U_n = 10 - 6 \times 0,6^n.$$

3. Comme $0 < 0,6 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6 \times 0,6^n = 0$ et enfin

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 10.$$

À terme les deux sociétés auront le même nombre de clients.

Exercice n° 2 :

N. B. : Pour cet exercice les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

Une classe comprend 20 élèves : 12 filles et 8 garçons.

1. Trois élèves de la classe sont tirés au sort pour devenir délégués de classe.

a. On tire un premier nom (20 possibilités), un deuxième (19 possibilités) et un troisième (18 possibilités), soit $20 \times 18 \times 18$ trios, mais si on a choisi le trio (k b s) celui-ci est le même que les trios (k s b), (b k s), (b s k), (s b k) et (s k b) : avec 3 personnes on trouve 6 trios identiques, donc le nombre de choix différents possibles avec ces 20 élèves est

$$\frac{20 \times 18 \times 18}{6} = \frac{6\,840}{6} = 1\,140.$$

b. Le nombre de choix avec uniquement des filles est de la même façon :

$$\frac{12\times 11\times 10}{6}=220.$$

La probabilité que 3 filles soient déléguées de classe est de $\dfrac{220}{1\,140}=\dfrac{22}{114}=\dfrac{11}{57}$.

2. **a.** La probabilité de choisir une fille est $P_F=\dfrac{12}{20}=\dfrac{4\times 3}{4\times 5}=\dfrac{3}{5}$. Celle de choisir un garçon est $P_F=\dfrac{8}{20}=\dfrac{4\times 2}{4\times 5}=\dfrac{2}{5}$ ou encore $1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$.

b. Les épreuves étant indépendantes le nombre de filles choisies suit une loi binomiale de paramètres $n=3$, avec $P_F=\dfrac{3}{5}$

La probabilité d'avoir une seule fille est donc égale à :

$$\binom{3}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=3\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{25}=\frac{36}{125}.$$

3. On a $P_A=0,6$; $P_B=0,5$ et $P(A\cup B)=0,8$.

a. On a $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\iff 0,8=0,6+0,5-P(A\cap B)\iff$ $P(A\cap B)=0,6+0,5-0,8=0,3$.

b. On sait que $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,3}{0,5}=\dfrac{3}{5}$.

Exercice n° 3 :

1. **a.** $f(x)=g(x)\iff \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x=\dfrac{15}{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+1}\iff\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-1\right)\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+1\right)=15\iff\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}-1=15\iff\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}-16=0\iff\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+4\right)\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-4\right)=0\iff\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+4=0\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-4=0\end{array}\right.\iff$ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x=-4\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x=4\end{array}\right.$.

La première équation n'a pas de solution puisque que quel que soit $a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a>0$, il reste donc $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x=4\iff\mathrm{e}^x=8$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^+$: $x=\ln 8$.

$$x=\ln\left(\frac{4+\sqrt{240}}{2}\right).$$

Comme $240=8\times 30=16\times 15$, on a $\sqrt{240}=\sqrt{16\times 15}=\sqrt{16}\times\sqrt{15}=4\sqrt{15}$, donc $x=\ln\left(\dfrac{4+4\sqrt{15}}{2}\right)$: $\ln\left(2+2\sqrt{15}\right)$.

On appelle cette solution le « prix d'équilibre », c'est-à-dire le prix en centaines d'euros qui permet l'égalité entre l'offre et la demande.

b. On a donc pour ce prix d'équilibre une offre de :

$f(\ln 8)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln 8}-1=\dfrac{1}{2}\times 8-1=4-1=3$, soit 300 objets.

c. On a donc un chiffre d'affaires de $300 \times \ln 8 = 3\ln 2^3 = 900\ln 2 \approx 62\,383$ €.

2. Soit la fonction $h(x)$ définie par $h(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

a. La fonction polynôme h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$h'(x) = 4x - 3$.

b. On pose $u(x) = 2x^2 - 3x + 4$ et donc $u'(x) = 4x - 3$.
On a donc $k(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 4}$.