☙ BACCALAURÉAT GÉNÉRAL ❧

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Corrigé de la session du 15 mars 2021 Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

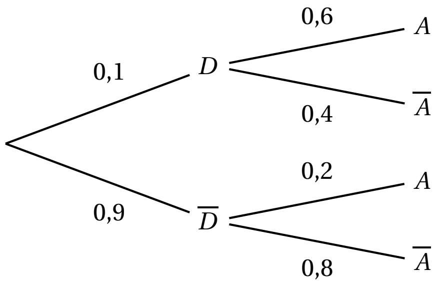
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Exercice 1, commun à tous les candidats **5 points**

Partie 1

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2. On a $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.
3. On a de même $P\left(\overline{D} \cap A\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(A) = 0,9 \times 0,2 = 0,18$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,06 + 0,18 = 0,24$.
4. On a $P_A\left(\overline{D}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(A)} = \dfrac{P\left(\overline{D} \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

Partie 2

1. **a.** Les paramètres de cette loi sont $n = 7$ et $p = 0,24$.
   b. On a $P(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24 \times (1 - 0,24)^{7-1} = 7 \times 0,24 \times 76^6 \approx 0,324$ soir environ 0,32 au centième près.
   c. On a $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,146 - 0,324$ soit environ 0,53.
2. **a.** On a $P_n = 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.
   b. La probabilité d'avoir au moins un candidat reçu est $1 - P_n = 1 - 0,76^n$.
   Il faut donc résoudre $1 - 0,76^n \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,99 \geqslant 0,76^n$ ou $0,01 \geqslant 0,76^n$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,76 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,76}$.
   Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,76} \approx 16,7$. Il faut donc présenter au moins 17 candidats.

Exercice 2, commun à tous les candidats **5 points**

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

b. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$: ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de zéro.

2. le dénominateur étant non nul, la fonction f quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times x - 1 \times \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

3. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, , $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$; le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$:
- Sur $[0; 1]$, $x - 1 < 0$, donc $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante de $+\infty$ à $f(1) = \mathrm{e}$;
- Sur $[1\ ;\ +\infty]$, $x - 1 > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante de $(1) = \mathrm{e}$ à $f(1) = \mathrm{e}$ à $+\infty$;
- $f(1) = \mathrm{e}$ est donc le minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. On voit f prend toutes les valeur réelles de e à plus l'infini, donc :
- Si $m > \mathrm{e}$: l'équation $f(x) = m$ a deux solutions;
- Si $m = \mathrm{e}$: l'équation $f(x) = \mathrm{e}$ a une solution : 1;
- Si $m < \mathrm{e}$: l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution.

5. a. Δ a pour coefficient directeur -1, donc la tangente aussi et ce coefficient directeur est égal au nombre dérivé $f'(a) = \dfrac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2}$. D'où :
$\dfrac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^a(a-1) = -a^2 \iff \mathrm{e}^a(a-1) + a^2 = 0$.
Donc a doit être solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.

b. Sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a :
$g'(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + 1 \times \mathrm{e}^x + 2x = \mathrm{e}^x(x - 1 + 1) + 2x = x\mathrm{e}^x + 2x$.
On voit que $g'(x)$ est la somme de deux termes positifs donc est positive sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On a $g(0) = 1 \times (-1) + 0 = -1 = 1$.
La fonction g est donc croissante de -1 à plus l'infini car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$.

c. De la question précédente et en appliquant le théorème de la bijection on déduit que f s'annule une seule fois sur $[0\ ;\ +\infty[$; il existe donc $a \in]0\ ;\ +\infty[$ unique tel que $f(a) = 0$.
La calculatrice donne $a \approx 0,74$.

Exercice 3, commun à tous les candidats **5 points**

1. Les droites (AC) et (SB) ne sont pas coplanaires :

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0);\mathrm{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont : On a $\mathrm{K}(0\ ;\ -0,5\ ;\ 0,5)$ et $\mathrm{L}(0,5\ ;\ 0,\ ;\ 0,5)$ donc $\mathrm{N}(0,25\ ;\ -0,25\ ;\ 0,5) = \left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont : $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

4. *Méthode* 1
On voit que la seule représentation dont le vecteur directeur a pour coordonnées $(1\,;\,0\,;\,1)$ est la troisième.
De plus la valeur $t = -1$ donne les coordonnées de A et la valeur $t = 0$ donne les coordonnées de S. Donc réponse **c.**

Méthode 2 $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AS}) \iff$ il existe $u \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\text{A}M} = u\overrightarrow{\text{AS}}\,(u \in \mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{l c l} x-(-1) & = & 1\times u\\ y-0 & = & 0\times u\\ z-0 & = & 1\times u\end{array}\right.$ $(u \in \mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & -1+u\\ y & = & 0\\ z & = & u\end{array}\right.$ $(u \in \mathbb{R})$.

En posant $-1+u = t$ ou encore $u = 1+t$ le système devient en remplaçant u par $1+t$:

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AS}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l c l} x & = & t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+t\end{array}\right.$. Donc réponse **c.**

5. On procède par élimination.
- Le plan d'équation $y+z-1 = 0$ ne contient pas C $(1\,;\,0\,;\,0)$; on élimine **a.**
- Le plan d'équation $x-y+z = 0$ ne contient pas S $(0\,;\,0\,;\,1)$; on élimine **c.**
- Le plan d'équation $x+z-1 = 0$ ne contient pas B $(0\,;\,1\,;\,0)$; on élimine **d.**

Réponse b.

Exercice au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B. Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B. Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1.
- $u_1 = \frac{3}{4}\times 1 + 0 + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$;
- $u_2 = \frac{3}{4}\times\frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16} = 2,5625$.

2. **a.** Dans la cellule B3 : =0,75*B2 + 0,25*A3 +1.

b. La suite (u_n) semble être croissante.

3. **a.** *Initialisation* : au rang 0 : on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$, soit $0 \leqslant 1 \leqslant 1$.
Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
En multipliant par le nombre positif $\frac{3}{4}$, on a $\frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$, puis en ajoutant à chaque terme $\frac{1}{4}n+1$:
$\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$, soit
$n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+1+\frac{3}{4}$ et enfin
$n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant (n+1)+1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: on a démontré par le principe de récurrence que quel que soit le naturel n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. Les termes de la suite sont encadrés par des entiers consécutifs de plus en plus grands, donc la suite est croissante.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, par le principe d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. .

c. On a pour tout naturel $n \geqslant 1$: $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ soit en multipliant par $\dfrac{1}{n}$ non nul : $\frac{n}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n}{n+1}$ ou

$1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n}{n+1}$.

Or comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, par le principe d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}(u_n - n) = \dfrac{3}{4}v_n$.

Cette égalité montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = u_0 = 1$.

b. On sait alors que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Or $v_n = u_n - n \iff u_n = v_n + n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour tout x réel strictement positif, on a : $f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \dfrac{3}{x}$

D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x} = 1$

Puis, par limite du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

Comme par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4 - \dfrac{3}{x} = 4$, par limite de la somme, on en conclut :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \dfrac{3}{x} = +\infty$.

2. On a $f'(x) = 1 - 4 \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2}$.

3. **a.** On sait que sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - 4x + 3$.

Or $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1 = (x-2+1)(x-2-1) = (x-1)(x-3)$.

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]1\,;\,3[$ où $f'(x) < 0$.

Conclusion : la fonction f est croissante sur $]0\,;\,1[$, décroissante de $]1\,;\,3[$ et croissante sur $]3\,;\,+\infty[$.

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$6 - 4\ln 3 \approx 1,6$	↗	$+\infty$

b. La simple lecture ne permet pas de comparer $\dfrac{5}{3}$ et $6 - 4\ln 3$.

Avec $6-4\ln 3 \approx 1,6$ et $\dfrac{5}{3} < \dfrac{6}{3} = 2$, on peut affirmer qu'il existe trois antécédents de $\dfrac{5}{3}$, donc trois solutions pour l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ dans $\mathbb{R}_+$.

4. f' est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \dfrac{x^2(2x-4)-2x\left(x^2-4x+3\right)}{x^4} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+8x^2-6x}{x^4} = \dfrac{4x^2-6x}{x^4} = \dfrac{4x-6}{x^3} = \dfrac{2(2x-3)}{x^3}.$$

Comme $x^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2x-3$. Donc :

- Sur $\left]0\,;\,\frac{3}{2}\right[$, $f''(x) < 0$: la fonction est concave ;
- Sur $\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, $f''(x) > 0$: la fonction est convexe ;
- $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, donc $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{3}{2}$.

Son ordonnée est $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\frac{3}{2} - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + 4 - 2 - 4\ln\frac{3}{2} = \dfrac{7}{2} - 4\ln\frac{3}{2}$.