Durée : 1 heure 30

Correction Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH

Série STI2D et STL **Mercredi 13 mai 2015**

SUJET DE MATHÉMATIQUES

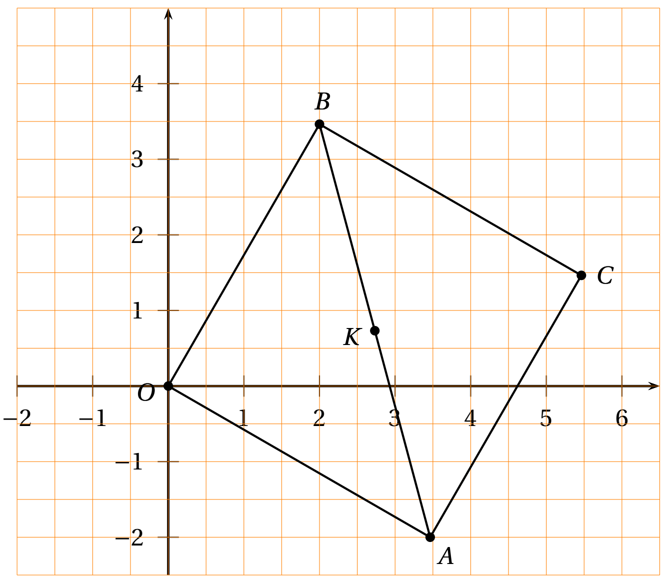
Il faut choisir et réaliser seulement **trois des quatre exercices** proposés

EXERCICE 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}z_{\mathrm{A}}.$$

1. Déterminons la forme algébrique de z_{B}.
   $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}(2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$
2. **a.** Déterminons les modules respectifs $|z_{\mathrm{A}}|$ et $|z_{\mathrm{B}}|$ de z_{A} et z_{B}.
   $|z_{\mathrm{A}}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$
   $|z_{\mathrm{B}}| = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$
   b. OA =4 et OB =4.
3. Le triangle OAB est tracé ci-dessous.



4. **a.** Soit θ_{A} un argument de z_{A}. Nous avons alors $\cos\theta_{\mathrm{A}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_A = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$
   Par conséquent $\arg(z_{\mathrm{A}}) = -\dfrac{\pi}{6}$.
   b. Soit θ_{B} un argument de z_{B}. Nous avons alors $\cos\theta_{\mathrm{B}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Par conséquent $\arg(z_{\mathrm{B}}) = \dfrac{\pi}{3}$.
   c. Une mesure de $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ est $-\dfrac{\pi}{6}$ et une mesure de $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{3}$.
5. Le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle. Il est isocèle car OA=OB, il est rectangle car $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\ \vec{u}\right) + \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = -(-\dfrac{\pi}{6}) + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$.
6. On considère le milieu K du segment [AB].
   a. Déterminons l'affixe z_{K} de K.
   $z_{\mathrm{K}} = \dfrac{1}{2}(z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}) = \dfrac{1}{2}\left(\left(2 + 2\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\left(2\sqrt{3} - 2\right)\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\left(-1 + \sqrt{3}\right)$
   b. Le point K est placé sur la figure de la question 3.

7. On note C le point tel que OACB soit un parallélogramme.

a. Le parallélogramme OACB est tracé sur la figure de la question 3.

b. Déterminons l'affixe z_C de C.

Puisque K est le milieu de [AB] c'est-à-dire d'une diagonale et que OACB est un parallélogramme, par conséquent K est aussi le milieu de l'autre diagonale [OC].

IL en résulte $z_C = 2z_K$.

$z_C = \left(2(1+\sqrt{3})\right) + \text{i}\left(2(-1+\sqrt{3})\right) = \left(2+2\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(-2+2\sqrt{3}\right)$

c. Le parallélogramme OACB est un carré puisque c'est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même mesure (OA=OB) et possède un angle droit (nous l'avons montré précédemment).

EXERCICE II

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = \frac{1}{\text{e}^{2x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{2x} = 0$

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{2x}+1 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$.

b. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes, notées Δ_1 et Δ_2.

Δ_1 est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et a pour équation $y = 1$

Δ_2 est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et a pour équation $y = 0$.

2. a. f' désigne la dérivée de f.

$f = \dfrac{1}{v}$ par conséquent $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$. En posant $v(x) = \text{e}^{2x}+1$ nous obtenons $v'(x) = 2\text{e}^{2x}$

pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{2\text{e}^{2x}}{\left(\text{e}^{2x}+1\right)^2}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) < 0$ comme opposé d'un nombre strictement positif étant quotient de deux réels strictement positifs.

Si pour tout $x \in I\ f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Dressons le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
Variation de f	1	0

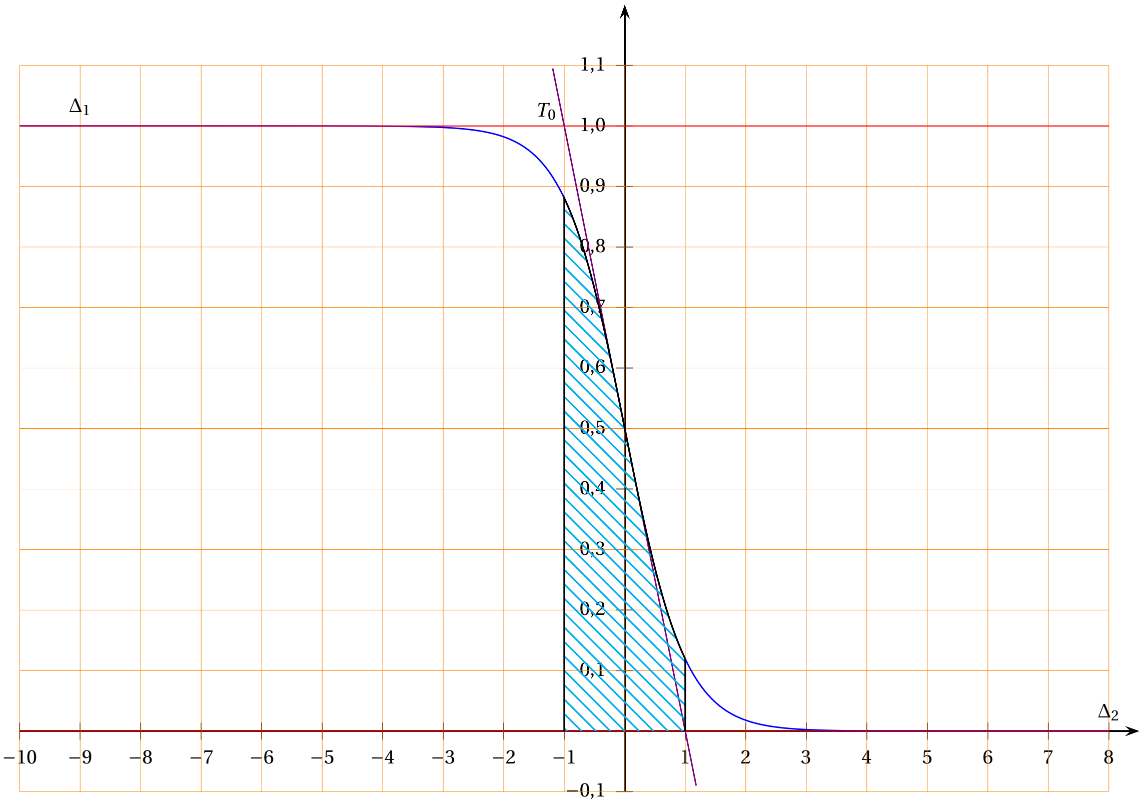
3. a. $f(0) = \dfrac{1}{\text{e}^0+1} = \dfrac{1}{2} \quad f'(0) = -\dfrac{2\times\text{e}^0}{\left(\text{e}^0+1\right)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

b. Déterminons une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -\dfrac{1}{2}(x) + \dfrac{1}{2}$.

4. Les droites Δ_1, Δ_2, T_0 puis la courbe $\mathscr{C}_f$ sont tracées ci-dessous.



Partie B

On considère les intégrales I et J définies par

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx.$$

1. On considère les fonctions h et H définies par :

$$\text{pour tout réel } x,\ h(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right).$$

a. $\dfrac{e^2+1}{e^{-2}+1} = \dfrac{e^2+1}{\frac{1}{e^2}+1} = \dfrac{e^2+1}{\frac{1+e^2}{e^2}} = \dfrac{e^2 \times \cancel{\left(e^2+1\right)}}{\cancel{e^2+1}} = e^2$. La relation est justifiée.

b. H est une primitive de h lorsque $H' = h$. Calculons $H'(x)$;

$H'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2 \times e^{2x}}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = h(x)$.

H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

c. Montrons que $J = 1$.

$J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\ln\left(e^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(e^{-2}+1\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{e^{-2}+1}\right) = \frac{1}{2}\ln e^2 = \ln e = 1$

2. Calculons la somme $I + J$.

$I + J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx = \int_{-1}^{1} dx = \Big[x\Big]_{-1}^{1} = 2$

3. Déterminons la valeur de I.

Nous savons que $I + J = 2$ et que $J = 1$. Par conséquent $I = 1$.

4. Sur $[-1\,;\,1]$, f est une fonction positive, l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ est en unités d'aire $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$ c'est-à-dire I. Par conséquent le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut I est la partie hachurée sur la figure de la question A 4.

EXERCICE III

La victoire de l'équipe féminine espagnole, le 2 août 2013, aux championnats du monde de water-polo a été fortement médiatisée en France. Il s'ensuivit une forte augmentation du nombre de filles licenciées dans tous les clubs français de water-polo à partir de septembre 2013.
Au 1er septembre 2013, les clubs français de water-polo comptaient 4 500 filles licenciées.
L'évolution du nombre de filles licenciées est modélisée par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

u_0 représente le nombre de filles licenciées, exprimé en milliers, au 1er septembre 2013. Ainsi $u_0 = 4,5$.
Pour tout $n \geqslant 1$, u_n représente le nombre de filles licenciées, exprimé en milliers, n mois plus tard.
Ainsi u_1 désigne le nombre de filles licenciées au 1er octobre 2013, u_2 désigne le nombre de filles licenciées au 1er novembre 2013, etc.

On constate que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

1. **a.** Calculons le nombre de filles licenciées à chacune des dates suivantes :
- au 1er octobre 2013, $u_1 = 2 + 0,8 \times 4,5 = 5,6$. Il y a donc à cette date 5 600 filles licenciées.
- au 1er novembre 2013 $u_2 = 2 + 0,8 \times 5,6 = 6,48$. Il y a donc à cette date 6 480 filles licenciées.
- au 1er décembre 2013 $u_1 = 2 + 0,8 \times 6,48 = 7,184$. Il y a donc à cette date 7 184 filles licenciées.

b. p_1 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er septembre et le 1er octobre 2013.

p_2 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er octobre et le 1er novembre 2013.

p_3 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er novembre et le 1er décembre 2013.

Le taux d'évolution t est défini par $t = \dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$

- $p_1 = \dfrac{5,6 - 4,5}{4,5} \approx 0,2444$.
  Le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er septembre et le 1er octobre 2013 est d'environ 24,44 %
- $p_2 = \dfrac{6,48 - 5,6}{5,6} \approx 0,15714$.
  Le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er octobre et le 1er novembre 2013 est d'environ 15,71 %
- $p_3 = \dfrac{7,184 - 6,48}{6,48} \approx 0,10864$.
  Le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er novembre et le 1er décembre 2013 est d'environ 10,86 %

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier n, $v_n = 10 - u_n$.

a. Donnons la valeur de v_0. $v_0 = 10 - u_0 \quad v_0 = 10 - 4,5 = 5,5$.

b. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.
$v_{n+1} = 10 - u_{n+1} = 10 - (2 + 0,8u_n) = 8 - 0,8u_n = 0,8(10 - u_n) = 0,8v_n$.
Quel que soit l'entier naturel n, pour déterminer le terme suivant v_{n+1}, nous multiplions le terme v_n toujours par le même nombre 0,8.
Il en résulte que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 5,5.

c. Exprimons, pour tout entier n, v_n en fonction de n.
Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0q^n$.
$v_n = 5,5 \times (0,8)^n$

3. Montrons alors que, pour tout entier n, $u_n = 10 - 5,5 \times 0,8^n$.
Puisque pour tout n, $v_n = 10 - u_n$, nous pouvons alors écrire $u_n = 10 - v_n$ et en remplaçant v_n par le résultat précédent $u_n = 10 - 5,5 \times (0,8)^n$.

4. Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 10 - \lim_{n\to+\infty} 5,5 \times 0,8^n = 10$.
En effet lorsque la raison d'une suite géométrique est telle que $|q| < 1$, la suite tend alors vers 0.

5. **a.** Déterminons la plus petite valeur n_0 de l'entier n tel que : $5,5 \times 0,8^n \leqslant 1$.
Pour ce faire, résolvons cette inéquation.

$$5,5\times 0,8^n \leqslant 1$$
$$0,8^n \leqslant \frac{1}{5,5}$$
$$0,8^n \leqslant \frac{2}{11}$$
$$n\ln 0,8 \leqslant \ln\left(\frac{2}{11}\right) \qquad \text{la fonction } \ln \text{ est une fonction strictement croissante sur }]0\,;+\infty[$$
$$n\ln 0,8 \leqslant \ln 2-\ln 11 \qquad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b \quad a>0;\ b>0$$
$$n \geqslant \frac{\ln 2-\ln 11}{\ln 0,8} \qquad \text{car } \ln 0,8<0$$
$$n \geqslant -\frac{\ln 11-\ln 2}{\ln 0,8}$$

$n \approx 7,6367$ Par conséquent le plus petit entier n_0 tel que $5,5\times 0,8^n \leqslant 1$ est 8.

b. Déterminons la date à partir de laquelle le nombre de filles licenciées dans les clubs français de water-polo aura doublé par rapport à celui du 1er septembre 2013.
Déterminons n tel que $u_n \geqslant 2u_0$ c'est-à-dire $10-5,5\times 0,8^n \geqslant 2\times 4,5$ ou en simplifiant $5,5\times 0,8^n \leqslant 1$. Nous avons montré à la question précédente que le plus petit entier vérifiant cette inégalité est 8, par conséquent à partir du 1er mai 2014, le nombre de filles licenciées dans les clubs français de water-polo aura doublé par rapport à celui du 1er septembre 2013.

EXERCICE IV

Dans tout l'exercice, pour chaque probabilité ou chaque pourcentage demandé, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie A

Une étude sur tous les nageurs français de haut niveau a montré que leur taille, mesurée en centimètres, pouvait être représentée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $m = 190$ et d'écart-type $\sigma = 7$.
On choisit au hasard un nageur français de haut niveau.

1. Donnons la probabilité P_1 que ce nageur mesure plus de 195 cm. $p_1 = 1-p(X \leqslant 195) = 1-0,76247 \approx 0,238$.
2. Donnons la probabilité P_2 que ce nageur mesure moins de 180 cm. $p_2 = p(X \leqslant 180) \approx 0,077$
3. Donnons la probabilité P_3 que ce nageur mesure entre 180 cm et 195 cm. $p_3 = p(180 \leqslant X \leqslant 195) \approx 0,686$.

Partie B

Le tableau ci-dessous donne la taille, en centimètres, et le poids, en kilogrammes, d'un échantillon de 14 nageurs français de haut niveau. La taille et le poids de chaque nageur sont arrondis à une unité près.

Nom	Agnel	Bernard	Bousquet	Coelho	Giot	Horth	Joly
Poids (en kg)	90	90	86	74	85	80	70
Taille (en cm)	200	196	188	182	198	185	188

Nom	Lacourt	Lefert	Leveaux	Manaudou	Ress	Sauvage	Steimetz
Poids (en kg)	85	68	92	99	78	82	83
Taille (en cm)	200	185	202	199	183	184	191

1. Donnons le poids moyen m_p et la taille moyenne m_t des nageurs de cet échantillon.
$$m_p = \frac{90+90+86+\cdots+78+82+83}{14} = 83$$
$$m_t = \frac{200+196+188+\cdots+183+184+191}{14} = 191,5.$$
2. Donnons le pourcentage Q_1 de nageurs de cet échantillon qui mesurent entre 186 cm et 190 cm. Il y a 2 nageurs mesurant entre 186 cm et 190 cm sur un total de 14 d'où $\frac{2}{14} \approx 0,1429$. $Q_1 \approx 14,29\,\%$.
3. Donnons le pourcentage Q_2 de nageurs de cet échantillon qui pèsent plus de 91 kg. Il y a 2 nageurs pesant plus de 91 kg sur un total de 14 d'où $\frac{2}{14} \approx 0,1429$. $Q_2 \approx 14,29\,\%$.
4. Donnons le pourcentage Q_3 de nageurs de cet échantillon qui pèsent moins de 91 kg et mesurent plus de 186 cm.
Il y a 7 nageurs pesant moins de 91 kg et mesurant plus de 186 cm sur un total de 14 d'où $\frac{7}{14} = 0,50$. $Q_3 = 50\,\%$.

Partie C

On considère maintenant la population totale des nageurs français ayant une licence de natation. On suppose que la probabilité qu'un nageur, choisi au hasard dans cette population, pèse plus de 91 kg est égale à $0,3$.
Un entraineur doit constituer, pour une compétition amicale, une équipe de 10 nageurs. Pour cela, il choisit au hasard 10 nageurs dans la population décrite ci-dessus. On suppose que cette population est suffisamment importante pour que les choix des nageurs puissent être supposés indépendants les uns des autres.
On note Y la variable aléatoire représentant, parmi les 10 nageurs choisis, le nombre de nageurs pesant plus de 91 kg.

1. Y suit la loi binomiale de paramètres $(10\,;0{,}3)$.
2. Donnons la probabilité R_1 que l'équipe ne contienne aucun nageur pesant plus de 91 kg. $R_1 = p(Y = 0) \approx 0{,}028$
3. Donnons la probabilité R_2 que l'équipe contienne au moins un nageur pesant plus de 91 kg.
   $R_2 = p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) \approx 0{,}972$.