Corrigé du concours à l'entrée de l'école de santé des armées
6 avril 2023

Durée : 1 heure 30 minutes   Coefficient : 2

EXERCICE 1 - 6 points

QCM 1

On a une épreuve de Bernoulli avec une variable aléatoire X donnant le nombre de réponses exactes qui suit la loi binomiale avec $n = 4$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

On a $p(X = 0) = \binom{4}{0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$;

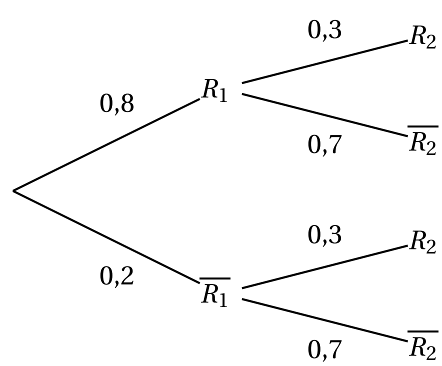
$p(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{4}{16}$.

On a la moyenne si $X = 2$ ou $X = 3$ ou $X = 4$), donc la probabilité d'avoir au moins la moyenne est :

$1 - \left(\dfrac{1}{16} + \dfrac{4}{16}\right) = 1 - \dfrac{5}{16} = \dfrac{11}{16}$: réponse **C**.

QCM 2

On peut dresser un arbre pondéré représentant l'administration des deux médicaments à une population assez nombreuse :



$p(X = 2) = 0,8 \times 0,3 = 0,24$;

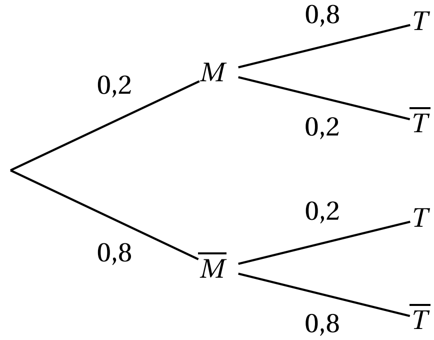
$p(X = 1) = 0,8 \times 0,7 + 0,2 \times 0,3 = 0,56 + 0,06 = 0,62$

$p(X = 0) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$

L'espérance de X est donc $E(X) = 0 \times 0,06 + 1 \times 0,62 + 2 \times 0,24 = 0,62 + 0,48 = 1,1$: réponse : **C**

QCM 3

On dresse un arbre pondéré :



Il faut calculer $p_T(M) = \dfrac{p(T\cap M)}{p(T)} = \dfrac{p(M\cap T)}{p(T)}$.
On a $p(M\cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}2\times 0{,}8 = 0{,}016$ et
$p(T) = p(M\cap T) + p\left(\overline{M}\cap T\right) = 0{,}016 + 0{,}8\times 0{,}2 = 0{,}016 + 0{,}016 = 0{,}032$.
$\dfrac{p(M\cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}016}{0{,}032} = 0{,}5$. Réponse **A**

QCM 4

On a $u_n = u_0\times 2^n$ et $v_n = v_0\times 3^n$, donc :
$s_n = u_0\times 2^n + v_0\times 3^n$ et
$p_n = u_0\times 2^n \times v_0\times 3^n = u_0v_0\times 6^n$.
La suite (s_n) n'a rien de particulier mais la suite $\left(p_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme u_0v_0 et de raison 6. Réponse **D**

QCM 5

On a $\dfrac{\ln(x-2)}{2-x} = -\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\ln(x-2)}{x-2} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} -\dfrac{\ln(x-2)}{x-2} = +\infty$: réponse **C**

QCM 6

On cherche les solutions dans l'ensemble $]-3\ ;\ +\infty[$ (plus grande contrainte). Doc si $x > -3$, alors :
$\ln(x+3)+\ln(x+2) = \ln(2) \iff \ln(x+3)(x+2) = \ln 2 \iff (x+3)(x+2) = 2$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff x^2+3x+2x+6 = 2 \iff x^2+5x+4 = 0 \iff \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} + 4 = 0 \iff \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} + \dfrac{16}{4} = 0 \iff \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} = 0 \iff \left(x+\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\right) = 0 \iff$
$(x+4)(x+1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+4 &=& 0\\ x+1 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4\\ x &=& -1\end{array}\right.$
Seule la solution -1 vérifie la contrainte. $S = \{-1\}$: réponse **B**

EXERCICE 2 - 6 points

QCM 7

Somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = 1\text{e}^{0,25x} + 0,25(x-4)\text{e}^{0,25x} = \text{e}^{0,25x}(1+0,25x-1) = 0,25x\text{e}^{0,25x}$.
On sait que quel que soit le réel x, $\text{e}^{x} > 0$ et $0,25 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de x.
Or sur $[-4~;~0[$, $x < 0$, donc la fonction f est décroissante sur $[-4~;~0[$ puis croissante sur $[0~;4]$.
On a ensuite : $f''(x) = 0,25\text{e}^{0,25x} + 0,25 \times 0,25\text{e}^{0,25x} = 0,25\text{e}^{0,25x}\left(1+\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{4}\text{e}^{0,25x} > 0$: la fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[-4~;~4]$. Réponse **C**

QCM 8

En posant $u(x) = x^2 - 16$, on a $u'(x) = 2x$. On a donc $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-16} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui est la dérivée de $\ln|u(x)|$.
Or le trinôme $u(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]-4~;~+4[$ où $u(x) \leqslant 0$.
Donc sur l'intervalle $[4~;~+\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $[5~;6]$, $u(x) > 0$, donc :
$\displaystyle\int_5^6 f(x)\,\text{d}x = \int_5^6 \dfrac{u(x)}{u(x)}\,\text{d}x = \left[\ln\left(x^2-16\right)\right]_5^6 = \ln(36-16) - \ln(25-16) = \ln 20 - \ln 9 = \ln\dfrac{20}{9}$.
Réponse **B**

QCM 9

Les vecteurs directeurs des deux droites $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_s}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc **A** et **B** sont fausses.
Si ces droites sont sécantes leur point commun a des coordonnées qui vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l c l}-3t+1 &=& 2t'-2\\ -2t-1 &=& -t'+3\\ 6t+4 &=& 3t'-5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}-3t+1 &=& 2t'-2\\ t' &=& 2t+4\\ 6t+4 &=& 3t'-5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}-3t+1 &=& 4t+8-2\\ t' &=& 2t+4\\ 6t+4 &=& 6t+12-5\end{array}\right. \iff$$

$\left\{\begin{array}{l c l}-5 &=& 7t\\ t' &=& 2t+4\\ 0t &=& 3\end{array}\right.$: ce système n'a pas de solution, donc réponse **D**

QCM 10

Jour n°	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Surface recouverte (une tumeur)	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	$\dots$							$\frac{1}{3^{11}}$
Surface recouverte (trois tumeurs)		1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\dots$							$\frac{1}{3^{10}}$

Réponse **A**

QCM 11
En dérivant $f(x)$ comme un produit, on obtient :
$f'(x) = \sqrt{x^2+1} + x \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Réponse **C**

QCM 12
On peut considérer qu'on a une épreuve de Bernoulli : la variable égale au nombre de personnes interrogées vaccinées suit une loi binomiale $\mathscr{B}(40, 0{,}8)$.
On a $e(X) = 40 \times 0{,}8 = 32$: cela signifie qu'en moyenne 32 habitants parmi les 40 sont vaccinés. Réponse **C**

EXERCICE 3 - 8 points

Pour cet exercice, on donne les approximations suivantes :

$\ln 0{,}05$	$\ln 0{,}95$	$\ln 2$	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}
-3	$-0{,}05$	0,7	0,36	0,14	0,05	0,02	0,007	0,002	0,0009

A. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + y = 5\mathrm{e}^{-0{,}5t} \text{ sur l'intervalle } [0~;~+\infty[.$$

1. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$u'(t) = 10 \times (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = -5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
$u(t)$ est solution de (E) si et seulement si :
$u'(t) + u(t) = 5\mathrm{e}^{-0{,}5t} \iff 10\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 5\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ qui est vraie.
2. On sait que les solutions de l'équation sont les fonctions : $t \longmapsto f(t) = K\mathrm{e}^{-1t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par
$$t \mapsto K\mathrm{e}^{-t} + 10\mathrm{e}^{-0{,}5t}, \quad K \in \mathbb{R}$$
4. La solution s'annulant en 0 est telle que :
$K\mathrm{e}^{-0} + 10\mathrm{e}^{-0{,}5\times 0} = 0 \iff K + 10 = 0 \iff K = -10$
La solution est donc $t \mapsto 10\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 10\mathrm{e}^{-t}$.

B. Un médicament est injecté par voie intramusculaire.
On voit que $f(t)$ est la solution de l'équation différentielle (E) s'annulant en 0

1. D'après la remarque initiale on sait que
$f'(t) + f(t) = 5\mathrm{e}^{-0{,}5t} \Longrightarrow f'(t) = 5\mathrm{e}^{-0{,}5t} - f(t) = 5\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 10\left(\mathrm{e}^{-0{,}5t} - \mathrm{e}^{-t}\right) =$
$-5\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 10\mathrm{e}^{-t}$.
   - $f'(t) > 0 \iff -5\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 10\mathrm{e}^{-t} > 0 \iff 10\mathrm{e}^{-t} > 5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ et en multipliant par $\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{5} > 0$,
$2 > \mathrm{e}^{0{,}5t} \iff \ln 2 > 0{,}5t \iff 2\ln 2 > t$ (par croissance de la fonction logarithme népérien.)
Donc sur l'intervalle $[0~;~2\ln 2]$, $f'(t) > 0$ la fonction f est croissante.
De même :
   - $f'(t) < 0 \iff -5\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 10\mathrm{e}^{-t} < 0 \iff 10\mathrm{e}^{-t} < 5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ et en multipliant par $\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{5} > 0$),
$2 < \mathrm{e}^{0{,}5t} \iff \ln 2 < 0{,}5t \iff 2\ln 2 < t$.
Donc sur l'intervalle $[2\ln 2~;~+\infty]$, $f'(t) < 0$: la fonction f est décroissante.

2. La fonction est croissante puis décroissante : elle admet donc un extremum :
$f2\ln 2) == 10\left(\text{e}^{-0,5\times 2\ln 2}-\text{e}^{-\ln 4}\right)=10\left(\text{e}^{-\ln 2}-\text{e}^{-\ln 4}\right)=10\left(\dfrac{1}{\text{e}^{\ln 2}}-\dfrac{1}{\text{e}^{\ln 4}}\right)=10\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=$
$10\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}=2,5$.

3. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\text{e}^{-0,5t}=\lim_{t\to+\infty}\text{e}^{-t}=0$ donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

4.

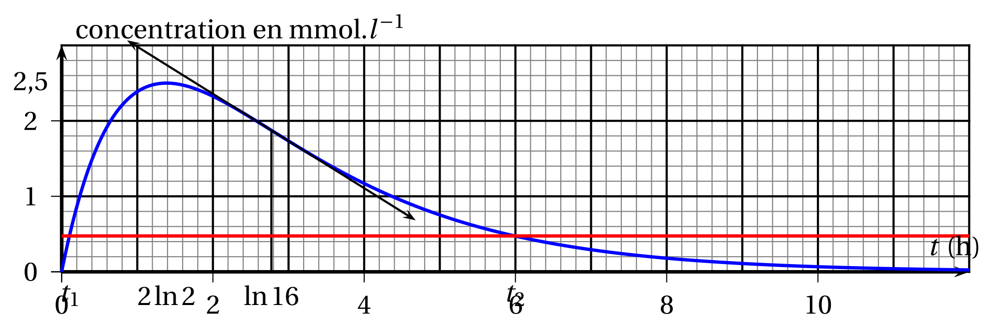
x	0		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	2,5	↘	0

5. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

a. Si $\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0,on sait que :
$M(x\,;\,y)\in\mathscr{T}\iff y-f(0)=f'(0)(x-0)$.
On a $f(0)=0$ et $f'(0)=-5+10=5$, on obtient :

$$M(x\,;\,y)\in\mathscr{T}\iff y=5x.$$

b.



6. On estime que le médicament est éliminé dès que sa concentration dans le sang redevient inférieure à 0,475 mmol. l^{-1}.

a. • Sur l'intervalle $[0\,;\,2\ln 2]$ la fonction est continue car dérivable et croissante de $f(0)=0$ à $f(2\ln 2)=2,5$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc une solution t_1 à l'équation $f(t)=0,475$;

• Même raisonnement avec f décroissante sur l'intervalle $[2\ln 2\,;\,+\infty[$ et $t_2\in[2\ln 2\,;\,+\infty[$ et $f(t_2)=0,475$.

b. $f(t)=0,475 :\iff 10\left(\text{e}^{-0,5t}-\text{e}^{-t}\right)=0,475\iff\text{e}^{-0,5t}-\text{e}^{-t}=0,0475$.
On pose $X=\text{e}^{-0,5t}$, d'où $X^2=\left(\text{e}^{-0,5t}\right)^2=\text{e}^{-t}$.
l'équation s'écrit donc : $X-X^2=0,0475\iff X^2-X+0,0475=0$
On a $\Delta=1-4\times 0,0475=1-0,19=0,81=0,9^2$
On a donc deux solution : $X_1=\dfrac{1+0,9}{2}=0,95$ et $X_2=\dfrac{1-0,9}{2}=0,05$

Or $X_1 = \mathrm{e}^{-0,5t_1} = 0,05 \Longrightarrow -0,5t_2 = \ln 0,05 \iff t_2 = \dfrac{\ln 0,05}{-0,5} \approx 0,103$.

De même $X_2 = \mathrm{e}^{-0,5t_2} = 0,95 \Longrightarrow -0,5t_2 = \ln 0,95 \iff t_2 = \dfrac{\ln 0,95}{-0,5} \approx 5,99$. (on vérifie sur le graphique ces deux valeurs

c. Le médicament est éliminé pratiquement après 6 h.

7. En pharmaceutique, on appelle ASC d'une concentration, en mmol. l^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Une primitive de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^a$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^a$, donc une primitive de la fonction f est la fonction F définie par

$$t \longmapsto F(t) = 10\left(\frac{1}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5t} - \frac{1}{-1}\mathrm{e}^{-t}\right) = 10\left(-2\mathrm{e}^{-0,5t} + \mathrm{e}^{-t}\right).$$

On a donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_0^x = 10\left(-2\mathrm{e}^{-0,5x} + \mathrm{e}^{-x}\right) - 10\left(-2\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-0}\right) =$
$10\left(-2\mathrm{e}^{-0,5x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + 10$.

L'ASC est donc égale à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 10\left(-2\mathrm{e}^{-0,5x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + 10$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc ASC = 10

b. La fonction f étant positive sur $[0~;~+\infty[$, l'intégrale ci-dessus est égale à l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites $X = 0$ et $X = x$, donc l'ASC représente l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ de zéro à plus l'infini.

8. **a.** De $f'(t) = -5\mathrm{e}^{-0,5t} + 10\mathrm{e}^{-t}$ on en déduit :
$f''(t) = -0,5 \times (-5)\mathrm{e}^{-0,5t} - 10\mathrm{e}^{-t} = 2,5\mathrm{e}^{-0,5t} - 10\mathrm{e}^{-t}$.

Donc $f''(t) = 0 \iff 2,5\mathrm{e}^{-0,5t} - 10\mathrm{e}^{-t} = 0 \iff \mathrm{e}^{-0,5t} - 4\mathrm{e}^{-t} = 0 \iff$ (en multipliant par e^t,

$\mathrm{e}^{0,5t} - 4 = 0 \iff \mathrm{e}^{0,5t} = 4 \iff 0,5t = \ln 4 \iff t = 2\ln 4 = \ln 16$.

La courbe $\mathscr{C}$ présente un point d'inflexion au point d'abscisse $\ln 16$.

b. En ce point la courbe est traversée par sa tangente ; la courbe passe à partir de ce point de sa partie concave à sa partie convexe.