∽ Corrigé du concours d'entrée à l'école de santé des armées ∾

29 mars 2021

Durée : 1 heure 30 minutes Coefficient : 2

Exercice 1. **6 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, 8, C ou D est exacte.

QCM 1

L'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$3[\ln(x)]^2 + 2\ln(x) - 5 = 0.$$

est :

A. $\left\{1\ ;\ -\frac{5}{3}\right\}$; **B.** $\left\{\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right\}$. **C.** $\left\{\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right\}$. **D.** $\{\mathrm{e}\}$

En posant pour $x > 0$, $\ln x = X$, l'équation devient :
$3X^2 + 2X - 5 = 0$: la solution 1 est évidente et le produit des racines étant égal à $-\dfrac{5}{3}$, l'autre racine est $-\dfrac{5}{3}$.

On a donc $\left\{\begin{array}{rcl}\ln x &=& 1\\ \ln x &=& -\dfrac{5}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \mathrm{e}^1\\ x &=& \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\end{array}\right.$ Réponse **B.**

QCM 2

Les solutions réelles de l'inéquation $(\mathrm{e}^{x} - 1)(1 - x) \geqslant 0$ sont :

A. $]-\infty\ ;\ 1]$; **B.** $[0\ ;\ 1]$. **C.** $[0\ ;\ +\infty[$. **D.** $]-\infty\ ;\ 0[\cup]1\ ;+\infty[$

On a $\mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$ et $x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Un tableau des signes montre donc que sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $\mathrm{e}^{x} - 1 < 0$ et $1 - x > 0$, donc $(\mathrm{e}^{x} - 1)(1 - x) < 0$.

Sur $]0\ ;\ [$, $\mathrm{e}^{x} - 1 > 0$ et $1 - x > 0$, donc $(\mathrm{e}^{x} - 1)(1 - x) > 0$.

Sur $[1\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{x} - 1 > 0$ et $1 - x < 0$, donc $(\mathrm{e}^{x} - 1)(1 - x) < 0$. Réponse **B.**

QCM 3

Les solutions réelles de l'inéquation $\ln(-x + 5) < \ln(x + 1)$ sont :

A. $]2\ ;\ +\infty[$; **B.** $]-\infty\ ;\ 5[$. **C.** $]-1\ ;\ 5[$. **D.** $]2\ ;\ 5[$

Il faut que $\left\{\begin{array}{l c l} -x+5 & > & 0\\ x+1 & > & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c r} 5 & > & x\\ x & > & -1\end{array}\right.$
les solutions doivent appartenir à l'intervalle $]-1~;~5[$.

$\ln(-x+5) < \ln(x+1) \iff \text{e}^{\ln(-x+5)} < \text{e}^{\ln(x+1)}$ (par croissance de la fonction exponentielle), $\iff$ $5-x < x+1 \iff 4 < 2x \iff 2 < x$, donc $S =]2~;~5[$, réponse **D.**

QCM 4

La limite de $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en plus l'infini est :

A. $+\infty$; **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)} = \dfrac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = 0$. Réponse **C.**

QCM 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\text{e}^{\left(x^2-1\right)},$$

alors :

A. $f'(x) = \text{e}^{x^2-1}$; **B.** $f'(x) = 2x\text{e}^{x^2-1}$

C. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)\text{e}^{x^2-1}$. **D.** $f'(x) = 2x^2\text{e}^{x^2-1}$

On a $f'(x) = \text{e}^{\left(x^2-1\right)} + x\times 2x\text{e}^{\left(x^2-1\right)} = \text{e}^{\left(x^2-1\right)}\left(1+2x^2\right)$. Réponse **C.**

QCM 6

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\text{d}x$ est égale à :

A. -2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** π

Indication : calculer la dérivée de $h(x) = x\sin x+\cos x$.

On a $h'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$, donc
$\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\text{d}x = \int_0^{\pi} h'(x)\,\text{d}x = [h(x)]_0^{\pi} = [x\sin x+\cos x]_0^{\pi} = \pi\sin\pi+\cos\pi-(0\sin 0+\cos 0) = -0-1-1 = -2$, réponse **A.**

Exercice 2 **6 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte **en cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.

Toute réponse juste est comptée + 1 point, toute réponse fausse est comptée −0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour les **QCM 7** et **8**, on considère une population dont 5 % est touchée par une maladie.

QCM 7

On considère de manière aléatoire et indépendante deux personnes de cette population.

Soit l'évènement A : « aucune personne n'est malade ».

La probabilité de A est égale à :

A. 0,902 5 **B.** 0,002 5 **C.** 0,997 5 **D.** 0,1

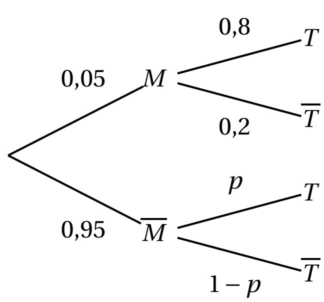
On a $p(A) = 0{,}95^2 = 0{,}902\,5$.

QCM 8

On sait que la probabilité qu'une personne ait un test positif à cette maladie, sachant qu'elle est malade, est 0,8. D'autre part, la probabilité d'avoir un test positif pour une personne de cette population est 0,1.

La probabilité que la personne soit malade sachant qu'elle a un test positif est égale à :

A. 0,8 **B.** 0,01 **C.** 0,4 **D.** 0,04



Avec les notations : M « la personne est malade » et T : « la personne a un test positif », on a :

$p(T) = p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right)$, soit

$0{,}1 = 0{,}05 \times 0{,}8 + 0{,}95p \iff 0{,}1 = 0{,}04 + 0{,}95p \iff 0{,}06 = 0{,}95p \iff p = \dfrac{0{,}06}{0{,}95}$.

On a donc $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}8}{0{,}1} = 0{,}4$. réponse **C.**

QCM 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 3x - 1$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

A. $y = 5x - 1$ **B.** $y = 5x$ **C.** $y = 4x$ **D.** $y = 5x + 3$

On a $M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

Avec $f(0) = \mathrm{e}^0 + 3 \times 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 3$, d'où $f'(0) = 2\mathrm{e}^0 + 3 = 2 + 3 = 5$. Donc :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - 0 = 5(x-0) \iff y = 5x$.Réponse B.

QCM 10

Soit la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 1{,}5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

A. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et$y = 2x - 1$.

B. La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$ est géométrique.

C. La suite (u_n) est majorée.

D. La suite (u_n) est décroissante.

On voit sur les premiers termes que la suite est croissante non majorée et ne semble n'être ni majorée, ni convergente.

Reste $v_n = u_n - 1$, d'où $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$: la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et $v_0 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ et $v_0 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$. d'où $v_n = 2 \times 0{,}5^n$ et $u_n = 2 \times 0{,}5^n + 1$. Réponse **B.**

QCM 11

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n + 1$.

A. La suite converge vers 1.

B. La suite diverge vers plus l'infini.

C. La suite converge vers zéro.

D. La suite diverge vers moins l'infini.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 - 10n + 1 = +\infty$, d'où réponse **B.**

QCM 12

La solution y de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ vérifiant $y(0) = -1$ est définie par :

A. $y(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2$.

B. $y(x) = \mathrm{e}^{0,5x} - 3$.

C. $y(x) = 2\mathrm{e}^{0,5x} - 3$.

D. $y(x) = \mathrm{e}^{2x-3}$.

Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = \iff 2y' = y \iff \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}$ sont les fonctions définies par $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Les réponses A et D sont éliminées et B aussi car $y(0) = 1 - 3 = -2 \neq -1$: réponse **C.**

Exercice 3 **8 points**

Un virus sévit dans une population. Un test (gold standard) permet de dire avec certitude si un individu est malade ou non.

Mais il est coûteux et invasif. Dans la pratique, on met en place un test sérologique, dont les indicateurs caractéristiques – la sensibilité et la spécificité – sont définis ci-après.

On prélève un individu au hasard dans la population et on considère les évènements :

M : « l'individu est malade » ;

NM : « l'individu n'est pas malade » ;

$T+$: « le test est positif » ;

T$-$: « le test est négatif'.

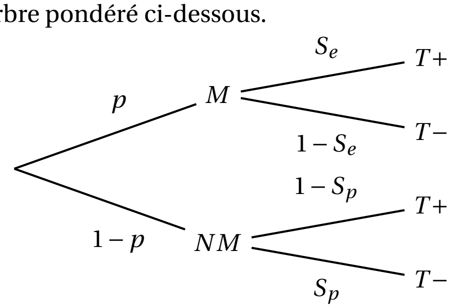
On note : p la probabilité que l'individu soit malade, on l'appelle la prévalence de la maladie ;

$S_e = P_M(T+)$ la sensibilité du test ;

$S_p = P_{NM}(T-)$ la spécificité du test.

1. Quelques calculs

Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. On appelle valeur prédictive positive du test le nombre $VPP = P_{T+}(M)$.

Montrer que $VPP = \dfrac{S_e p}{S_e p + (1-p)\left(1 - S_p\right)}$. D'après la loi des probabilités totales :

$p\left(T_+\right) = P\left(M \cap T_+\right) + P\left(NM \cap T_+\right) = pS_e + (1-p)\left(1 - S_p\right)$.

D'autre part $VPP = P_{T+}(M) = \dfrac{P\left(T_+ \cap M\right)}{P\left(T_+\right)} = \dfrac{P\left(M \cap T_+\right)}{P\left(T_+\right)} = \dfrac{pS_e}{pS_e + (1-p)\left(1 - S_p\right)}$

3. On suppose dans cette question, que la prévalence est de 30 %, que la sensibilité du test est de 90 % et que la spécificité du test est de 90 %.

 a. De $p = 0,3$, $S_e = 0,9$ et $S_P = 0,9$, on calcule :
 $VPP = \dfrac{0,3 \times 0,9}{0,3 \times 0,9 + 0,7 \times 0,1} = \dfrac{0,27}{0,27 + 0,07} = \dfrac{0,27}{0,34} = \dfrac{27}{34} \approx 0,794$, soit environ 79 %.

 b. Le test a t-il un intérêt ?

 Avec un taux aussi bas le test n'a pas beaucoup d'intérêt.

 c. Quel problème se pose-t-il en cas de maladie rare ?

 Avec par exemple $p = 0,01$, on obtient :
 $VPP = \dfrac{0,01 \times 0,9}{0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,1} = \dfrac{0,009}{0,009 + 0,0099} = \dfrac{0,009}{0,108} = \dfrac{27}{34} \approx 0,083$, soit environ 8 % : le test n'a aucun intérêt.

4. Dans cette question, on suppose que la prévalence est de 1 %, que la sensibilité du test est de 90 % et que la spécificité du test est de 90 %.

 a. Calculer la VPP du test sérologique.
 $VPP = \dfrac{0,01 \times 0,9}{0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,1} = \dfrac{0,009}{0,009 + 0,099} = \dfrac{0,009}{0,108} = \dfrac{9}{108} = \dfrac{1}{12} \approx 8,3\,\%$

 b. Le test a t-il un intérêt ?

 Non.

 c. Quel problème se pose en cas de maladie rare ?

 Quand la prévalence est faible la VPP n'a pas de signification.

5. La VPP d'un test sérologique n'est pas toujours un indicateur satisfaisant. On s'intéresse alors à un autre indicateur, le ratio de vraisemblance positif du test, défini par :

$$RV+ = \frac{P_M(T+)}{P_{NM}(T+)}.$$

 a. Exprimer $RV+$ en fonction des indicateurs du test.
 $RV+ = \dfrac{P_M(T+)}{P_{NM}(T+)} = \dfrac{S_e}{1 - S_p}$.

 b. Calculer le $RV+$ avec les données de la question 3 puis celles de la question 4.
 - : avec $p = 0,3$, $S_e = 0,9$ et $S_P = 0,9$, $RV+ = \dfrac{S_e}{1 - S_p} = \dfrac{0,9}{0,1} = 9$.
 - avec $p = 0,01$, $S_e = 0,9$ et $S_P = 0,9$, $RV+ = \dfrac{S_e}{1 - S_p} = \dfrac{0,9}{0,1} = 9$.

 c. On admet que plus le $RV+$ est grand, plus la VPP est grande.

 D'après la question précédente, le $RV+$ est-il suffisant pour conclure + la fiabilité du test ?

 Le $RV+$ n'est pas suffisant pour conclure + la fiabilité du test puisqu'il ne varie en fonction de p.

Si on a plusieurs tests possibles, comment choisir S_e et S_p pour avoir le test le plus significatif?

D'après l'écriture du quotient il faut avoir un S_e le plus grand possible et un S_p au contraire le plus petit.

Le gain diagnostique est important quand le RV+ est compris entre 5 et 10. S_e et S_p doivent donc être grands.

6. En situation clinique

Le médecin cherche surtout à ne pas « passer à côté d'une maladie » et accepte « d'alerter à tort » un patient.

Il abaisse le seuil de positivité du test. Quelle est la conséquence :

a. Sur S_e et S_p ?

Si le seuil de positivité baisse P_e va augmenter ainsi que S_p.

b. Sur le nombre de « faux positifs » ?

Le nombre de faux positifs va aussi augmenter.

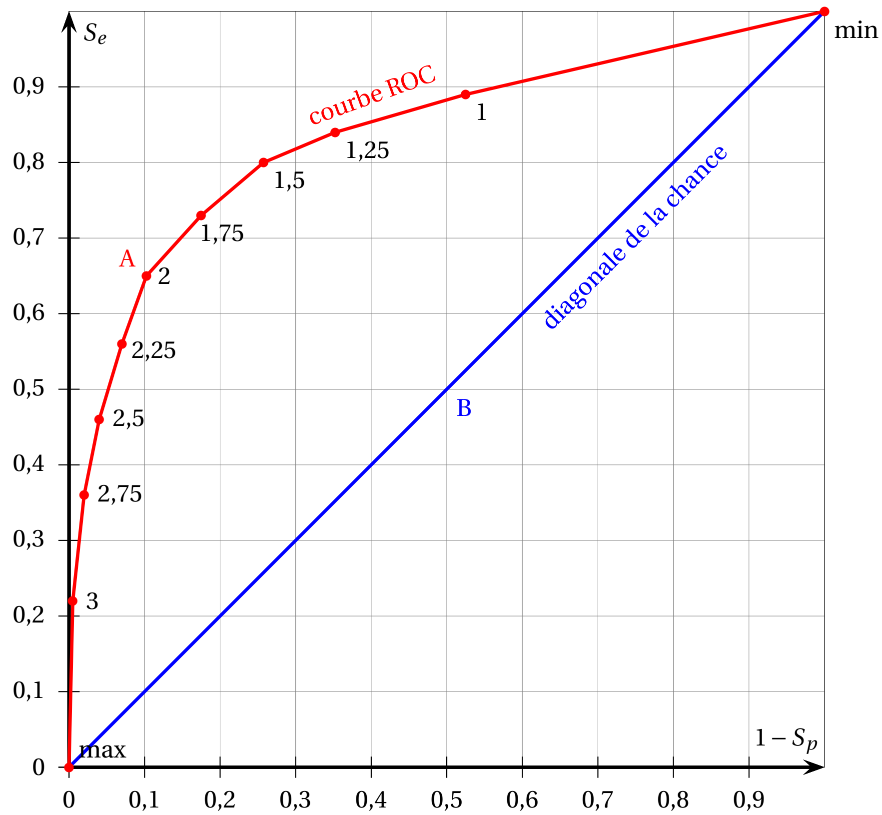
7. La courbe ROC

On vient de voir que l'on pouvait agir sur le seuil de positivité du test.

Lors du dépistage de la trisomie 21, le test consiste à mesurer l'indicateur HCG.

On donne le tableau suivant :

Seuil	S_p	$1-S_p$	S_e
Max	1	0	0
3	0,995	0,005	0,22
2,75	0,98	0,02	0,36
2,5	0,96	0,04	0,46
2,25	0,93	0,07	0,56
2	0,897 5	0,102 5	0,65
1,75	0,825	0,175	0,73
1,5	0,742 5	0,257 5	0,8
1,25	0,647 5	0,352 5	0,84
1	0,475	0,525	0,89
Min	0	1	1



a. Pour un seuil de sensibilité 2 correspondant au point A :

i. Que vaut $RV+$ à 10^{-2} près.

On a $RV+ = \dfrac{S_e}{1-S_p} = \dfrac{0{,}65}{0{,}1025} \approx 6{,}341$, soit 6,34 au centième près.

ii. Interpréter graphiquement cette valeur. Graphiquement ce quotient de l'ordonnée de A par son abscisse est égale à la pente de la droite (OA).

b. Pour le point B du graphique.

i. Que vaut $RV+$?

On a $RV+ = \dfrac{S_e}{1-S_p} = \dfrac{0{,}5}{0{,}5} = 1$.

ii. Que dire de ce test sérologique ?

Le diagnostic ne gagne pas en fiabilité : le patient a autant de chances d'être malade que d'être indemne

c. À quel point du graphique correspond le test parfait ?

Le point de coordonnées (0,07 ; 0,56) correspond au test parfait (on a $RV+ = 8$)

d. La capacité diagnostique d'un test peut être quantifiée par l'aire sous la courbe ROC.

i. Que vaut cette aire quand le test n'a pas d'intérêt ?

L'aire du triangle isocèle située sous la diagonale de la chance a une aire de $\dfrac{1 \times 1}{2} = 0,5$.

ii. Que vaut cette aire quand le test est parfait ?

L'aire du carré de côté 1 est égale à 1.

iii. Comment doit être cette aire pour que le test soit le meilleur possible ?

Le test est le meilleur quand l'aire sous la courbe ROC se rapproche le plus possible de 1.