Corrigé du concours d'entrée à l'école de santé des armées

1er avril 2022

Durée : 1 heure 30 minutes Coefficient : 2

EXERCICE 1 (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui parait exacte **en cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.

Toute réponse juste est comptée +1 point, toute réponse fausse est comptée −0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1

Une suite (u_n) est telle que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, alors :

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

C. la suite (u_n) converge **D.** la suite (u_n) diverge

La proposition signifie que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle est donc convergente vers un réel supérieur ou égal à 1 : réponse **C.**

QCM 2

La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 5 - \dfrac{1}{n^2+1}$ est :

A. décroissante sur $\mathbb{N}$ **B.** croissante sur $\mathbb{N}$

C. non monotone sur $\mathbb{N}$ **D.** minorée par 5 sur $\mathbb{N}$

Comme la suite $\dfrac{1}{n^2+1}$ est décroissante de 1 à 0, la suite (v_n) est croissante de 4 à 5 : réponse **B.**

QCM 3

La suite (S_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $S_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{4^n}$.

Alors la suite (S_n) :

A. a pour limite 2 **B.** a pour limite $\dfrac{4}{3}$.

C. n'a pas de limite **D.** a pour limite $+\infty$

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{4}$.

Comme $\dfrac{1}{4}S_n = \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, on obtient par différence :

$\dfrac{3}{4}S_n = 1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}$, d'où $S_n = \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^{n+1}} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{4}{3}$: réponse **B.** **QCM 4**

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

La dérivée de la fonction f a pour expression :

A. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

B. $-\dfrac{1}{x(x+1)}$

C. $-\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

D. $-\dfrac{1}{x(x+1)^2}$

Soit $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. En posant $u(x) = \dfrac{x+1}{x}$, on a $u'(x) = \dfrac{1\times x - 1\times(x+1)}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Or $g'(x) = g'(u) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x}} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$.

D'autre part $\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Finalement : $f'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$: réponse **C.**

QCM 5

Soit $E = \dfrac{\mathrm{e}^{1+\ln 2}}{3\mathrm{e}^{1+\ln 3}}$. Alors E est égale à :

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}+9}$

C. $\dfrac{2}{9}$

D. $\dfrac{1}{3}$

$E = \dfrac{\mathrm{e}^{1+\ln 2}}{3\mathrm{e}^{1+\ln 3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{\ln 2}}{\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{\ln 3}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{2\mathrm{e}}{3\mathrm{e}} = \dfrac{2}{9}$: réponse **C.**

QCM 6

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos^2(x) - 2\cos(x)$.

La dérivée de la fonction g a pour expression :

A. $\sin^2(x) + 2\sin(x)$

B. $-2\cos(x)\sin(x) + 2\sin(x)$

C. $2\sin(x)[\cos(x) - 1]$

D. $2\sin^2(x) - 2\sin(x)$

On a pour tout réel x, $g'(x) = -2\sin x\cos x - (-2\sin x) = -2\sin x\cos x + 2\sin x$: réponse **B.**

EXERCICE 2 (6 points)

QCM 7

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\text{e}^{2x}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de h a pour expression :

A. $H(x) = \dfrac{x^2\text{e}^{2x}}{4}$ **B.** $H(x) = (2x+1)\text{e}^{2x}$

C. $H(x) = \dfrac{x}{2}\text{e}^{2x}$ **D.** $H(x) = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\text{e}^{2x}$

Avec la dernière proposition :
$H(x) = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\text{e}^{2x}$ entraîne $H'(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x} + 2\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\text{e}^{2x} = \text{e}^{2x}\left(\dfrac{1}{2} + x - \dfrac{1}{2}\right) = x\text{e}^{2x} = h(x)$: réponse **D.**

QCM 8

L'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \left(\text{e}^x + 2x - 5\right)\,\text{d}x$ est égale à :

A. $\text{e}^3 + 1$ **B.** $\text{e}^3 + 4$ **C.** $\text{e}^3 - 7$ **D.** $\text{e}^3 - 1$

$\displaystyle\int_0^3 \left(\text{e}^x + 2x - 5\right)\,\text{d}x = \left[\text{e}^x\right]_0^3 + \left[x^2\right]_0^3 + [-5x]_0^3 = \text{e}^3 - 1 + 9 - 0 - 15 + 0 = \text{e}^3 - 7$: réponse **C.**

QCM 9

Le plan ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(-1\,;\,3\,;\,2)$ et passant par le point $\text{A}(-1\,;\,0\,;\,0)$ a pour équation cartésienne :

A. $-x - 3y + 2z - 5 = 0$ **B.** $-x + 3y + 2z + 2 = 0$

C. $x - 3y - 2z + 1 = 0$ **D.** $x + 3y - 2z + 1 = 0$

Si $\mathscr{P}$ est ce plan, on sait que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff -1 \times x + 3 \times y + 2 \times z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Ainsi $\text{A} \in \mathscr{P} \iff -1 \times (-1) + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \iff d = -1$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff -x + 3y + 2z - 1 = 0 \iff x - 3y - 2z + 1 = 0$: réponse **C.**

QCM 10

La couverture vaccinale contre la diphtérie-tétanos est de 90 % chez les jeunes de 15 ans.
Lors d'un sondage de la population des jeunes de 15 ans, on interroge au hasard 50 jeunes en une journée sur la vaccination contre la diphtérie-tétanos.
La population des jeunes de 15 ans est suffisamment importante pour assimiler ce sondage à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les jeunes de 15 ans vaccinés contre la diphtérie- tétanos parmi les 50 jeunes interrogés.

A. La probabilité qu'aucun des jeunes de 15 ans ne soit vacciné est égale à 50×10^{-49}

B. En moyenne, 45 jeunes parmi les 50 jeunes sont vaccinés

C. La probabilité que tous les jeunes de 15 ans soient vaccinés parmi les 50 jeunes interrogés a une valeur voisine de 1

D. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 15$ et $p = 0{,}9$

la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}9$ d'espérance $E = n \times p = 50 \times 0{,}9 = 45$: réponse **B**

QCM 11

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$, alors :

A. pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{10}$

B. pour tout entier naturel n non nul, $f\left(3^n\right) = 3f(n)$

C. $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1 - f(3)$

D. pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f(3x) = f(3) + f(x)$

propriété de la fonction logarithme : $f(3x) = \dfrac{\ln(3x)}{\ln 10} = \dfrac{\ln 3 + \ln x}{\ln 10} = \dfrac{\ln 3}{\ln 10} + \dfrac{\ln x}{\ln 10} = f(3) + f(x)$: réponse **D.**

QCM 12

Pour se préparer aux partiels, les étudiants de première année passent deux examens blancs.
40 % d'entre eux réussissent le premier examen blanc.
La probabilité d'échouer au deuxième examen blanc est 0,9 si l'étudiant a échoué au premier et 0,2 si le premier a été réussi.

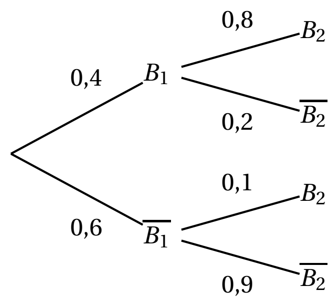
A. La probabilité qu'un étudiant réussisse les deux examens blancs est strictement supérieure à 0,4

B. La probabilité qu'un étudiant réussisse le deuxième examen blanc est strictement supérieure à 0,74

C. Si un étudiant réussit le deuxième examen blanc, la probabilité qu'il ait également réussi le premier examen blanc est strictement supérieure à 0,4

D. Si un étudiant échoue au deuxième examen blanc, la probabilité qu'il ait également échoué au premier examen blanc est strictement inférieure à 0,75.

On peut construire un arbre pondéré :



- La probabilité qu'un étudiant réussisse les deux examens blancs est $0,4 \times 0,8 = 0,32$: énoncé faux ;
- $p\left(B_2\right) = p\left(B_1 \cap B_2\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,1 = 0,32 + 0,6 = 0,38$: énoncé faux ;
- On a $p_{B_2}\left(B_1\right) = \dfrac{p\left(B_2 \cap B_1\right)}{p\left(B_2\right)} = \dfrac{p\left(B_1 \cap B_2\right)}{p\left(B_2\right)} = \dfrac{0,32}{0,2 + 0,06} = \dfrac{0,32}{0,38} = \dfrac{32}{38} \approx 0,84 > 0,4$: énoncé vrai ;
- On a $p_{\overline{B_2}}\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right)}{p\left(\overline{B_1}\right)} = \dfrac{0,6 \times 0,9}{0,4 \times 0,2 + 0,6 \times 0,9} = \dfrac{0,54}{0,62} \approx 0,87 > 0,75$: énoncé faux.

EXERCICE 3 **8 points**

Pour cet exercice, on donne $\ln(2) \approx 0,7$; $\ln(0,0005) \approx -7,6$; $\sqrt{0,0736} \approx 0,27$.

Un patient consulte un oncologue pour un problème de cellules cancéreuses.

Partie A : test

L'oncologue commence par faire un test pour savoir si la tumeur est opérable ou non. Pour cela, il mesure le temps t_0 (en heures) mis pour que la quantité q d'une certaine substance S_0 injectée dans l'organe malade atteigne son maximum.

Puis il applique la règle de décision suivante :

- Si $t_0 < 20$, la tumeur est opérable
- Si $t_0 \geqslant 20$, la tumeur n'est pas opérable

On note $q(t)$ la quantité, exprimée en milligrammes, de la substance S_0 dans l'organe malade, à l'instant t, en heures. On sait que la fonction q est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad 2y' + y = -0,001t + 3,998$$

où y est une fonction de la variable réelle t définie, dérivable sur l'intervalle $[0 ; 100]$ et y' sa fonction dérivée.

1. **a.** Résoudre l'équation $\left(E_0\right) : 2y' + y = 0$ sur l'intervalle $[0; 100]$.

On a $2y' + y = 0 \iff y' = -\dfrac{1}{2}y$: on sait que les solutions de cette équation sont les fonctions définies par $t \longmapsto y = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

b. Déterminer les deux réels a et b de l'intervalle $[0\,;\,100]$ tels que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $g(t) = at + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

On a $g'(t) = a$, donc g solution de (E) si $2a + at + b = -0{,}001t + 3{,}998$.

En identifiant ces deux polynômes on obtient :

$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -0{,}001 \\ 2a+b & = & 3{,}998 \end{array}\right.$, d'où $-0{,}002 + b = 3{,}998 \iff b = 4$.

Donc $g(t) = 4 - 0{,}001t$ sur $[0\,;\,100]$.

c. En déduire les solutions q de (E) sur l'intervalle $[0\,;\,100]$.

On sait qu'alors les solutions de (E) sont les fonctions définies par :

$$t \longmapsto 4 - 0{,}001t + K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

2. a. Démontrer que la solution q de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $q(0) = 0$ est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par

$$q(t) = 4 - 0{,}001t - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}.$$

Les solutions q de cette forme telles que $q(0) = 0 \iff 4 - 0 + K = 0 \iff K = -4$.

Finalement $q(t) = 4 - 0{,}001t - 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

b. Calculer la dérivée de q sur l'intervalle $[0\,;\,100]$.

On a sur $[0\,;\,100]$, $\quad q'(t) = -0{,}001 + \frac{1}{2} \times 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = -0{,}001 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

c. Étudier les variations de q sur l'intervalle $[0\,;\,100]$.

- $q'(t) > 0 \iff -0{,}001 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} > 0 \iff 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} > 0{,}001 \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} > 0{,}0005$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

  $-\frac{1}{2}t > \ln 0{,}0005 \iff t < -2\ln 0{,}0005$ soit d'après l'approximation donnée au début

  $t < (-2) \times (-7{,}6)$ et enfin $t < 15{,}2$, soit 15 h 12 min.
- $q'(t) < 0 \iff -\frac{1}{2}t < \ln 0{,}0005 \iff t > 15{,}2$;
- $q'(t) = 0 \iff -\frac{1}{2}t = \ln 0{,}0005 \iff t = 15{,}2$.

La fonction q est donc croissante sur $[0\,;\,15{,}2]$, puis décroissante sur l'intervalle $[15{,}2\,;\,100]$; $q(15{,}2) = 4 - 0{,}001 \times 15{,}2 - 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 15{,}2} = 4 - 0{,}152 - 4\mathrm{e}^{-7{,}6} \approx 3{,}846$ est le maximum de la fonction q sur l'intervalle $[0\,;\,100]$.

d. Donner une valeur t_0, approchée au dixième, pour laquelle q est maximale.

On a donc $t_0 = 15{,}2$.

Quelle est la décision de l'oncologue ?

Comme $15{,}2 \leqslant 20$, l'oncologue opérera la tumeur.

Partie B : récidive

Après l'opération, l'oncologue effectue un prélèvement sur les tissus voisins de la tumeur enlevée, qu'il envoie à un laboratoire d'analyses.

Ce laboratoire injecte dans le prélèvement une substance $_1$ composée de 1 000 cellules de type A.

On note $N(t)$ le nombre de cellules de type A à l'instant t, t étant exprimé en jours.

On sait que $N(t) = 1\,000\mathrm{e}^{rt}$ où r est un nombre réel donné ne dépendant que du prélèvement du patient à la date 0.

Puis il applique la règle de décision suivante :

- si le temps mis, pour avoir 2 000 cellules de type A dans le prélèvement, excède 10 jours, on dira que le risque de récidive est élevé.
- dans le cas contraire, on dira que ce risque est modéré.

Le laboratoire analyse le prélèvement du patient et annonce que le nombre de cellules de type A a quadruplé au bout de 28 jours.

1. Donner la valeur exacte de r.

   On a donc $N(28) = 4 \times 1\,000 = 1\,000\mathrm{e}^{r\times 28} \iff 4 = \mathrm{e}^{28r} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 4 = 28r \iff r = \dfrac{\ln 4}{28}$.
2. Quel est le risque de récidive pour ce patient ?

   On a donc $N(t) = 1\,000\mathrm{e}^{\frac{\ln 4}{28}t}$,donc

   $2\,000 = 1\,000\mathrm{e}^{\frac{\ln 4}{28}t} \iff 2 = \mathrm{e}^{\frac{\ln 4}{28}t} \iff \ln 2 = \frac{\ln 4}{28}t \iff \ln 2 = \frac{2\ln 2}{28}t \iff 1 = \dfrac{1}{14}t \iff t = 14$: le risque de récidive est donc élevé.

Partie C : chimiothérapie

L'oncologue propose de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en $\mu\text{mol.L}^{-1}$ (en micromole par litre), peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$c(t) = \frac{D}{K}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{Kt}{80}}\right)$$

où

* D est un réel positif représentant le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure,

$*$ K est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance est la capacité d'un patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement au patient en ajustant le débit D.

1. *Détermination de la clairance* :

Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes : on règle le débit de la perfusion sur 120 μmol. h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament qui est égale à 4,5 μmol. L^{-1}.

a. Justifier que la clairance K du patient est solution de l'équation :

$$120\left(1-\text{e}^{-\frac{3x}{40}}\right)-4,5x=0.$$

Avec $c=4,5$, $D=120$ et $t=6$, K est donc solution de l'équation :

$4,5=\dfrac{120}{x}\left(1-\text{e}^{-\frac{6x}{80}}\right) \iff 4,5x=120\left(1-\text{e}^{-\frac{6x}{80}}\right) \iff 120\left(1-\text{e}^{-\frac{3x}{40}}\right)-4,5x=0.$

b. Démontrer que cette équation admet une solution unique sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Considérons la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=120\left(1-\text{e}^{-\frac{3x}{40}}\right)-4,5x$.

f somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x)=120\times\dfrac{3}{40}\text{e}^{-\frac{3x}{40}}-4,5=9\text{e}^{-\frac{3x}{40}}-4,5.$

- $f'(x)=0 \iff 9\text{e}^{-\frac{3x}{40}}-4,5=0 \iff 9\text{e}^{-\frac{3x}{40}}=4,5 \iff \text{e}^{-\frac{3x}{40}}=0,5=\dfrac{1}{2} \iff$
$-\dfrac{3x}{40}=-\ln 2 \iff x=\dfrac{40\ln 2}{3}$; de façon analogue :
- $f'(x)>0 \iff 9\text{e}^{-\frac{3x}{40}}-4,5>0 \iff 9\text{e}^{-\frac{3x}{40}}>4,5 \iff \text{e}^{-\frac{3x}{40}}>0,5=\dfrac{1}{2} \iff$
$-\dfrac{3x}{40}>-\ln 2 \iff x<\dfrac{40\ln 2}{3}$ et
- $f'(x)<0 \iff 9\text{e}^{-\frac{3x}{40}}-4,5<0 \iff 9\text{e}^{-\frac{3x}{40}}<4,5 \iff \text{e}^{-\frac{3x}{40}}<0,5=\dfrac{1}{2} \iff$
$-\dfrac{3x}{40}<-\ln 2 \iff x>\dfrac{40\ln 2}{3}$.

Comme $\dfrac{40\ln 2}{3}\approx 9,24$, on en déduit que la fonction f est :

– croissante de $f(0)=0$ à $f\left(\frac{40\ln 2}{3}\right)\approx 18,4$;

– décroissante de $f\left(\frac{40\ln 2}{3}\right)\approx 18,4$ à $-\infty$.

Plus précisément on a donc $f(21)\approx 0,66$ et $f(22)\approx -2,04$, puis :

$f(21,2)\approx 0,13$ et $f(21,3)\approx -0,14$.

Comme f est continue car dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, que $f(21,2)>0$ et $f(21,3)<0$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique K, avec $K\in]21,2\,;\,21,3[$ tel que $f(K)=0$. On peut prendre $K=21$ à l'unité près.

On prendra $K = 21$ pour la suite du problème.

2. *Réglage du débit* :

a. Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D.

On a donc $c(t) = \dfrac{D}{21}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{21t}{80}}\right)$.

Comme $-\dfrac{21t}{80} < 0$, on sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{21t}{80}} = 0$, donc :

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} c(t) = \dfrac{D}{21} = \ell$.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ.

Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être égale à $10\mu\text{mol.L}^{-1}$.

En déduire la valeur du débit D, à régler par le médecin.

On a donc $\dfrac{D}{21} = \ell = 10 \iff D = 210$. (micromole par heure)