Corrigé du baccalauréat ES/L Centres étrangers
1er juin 2016

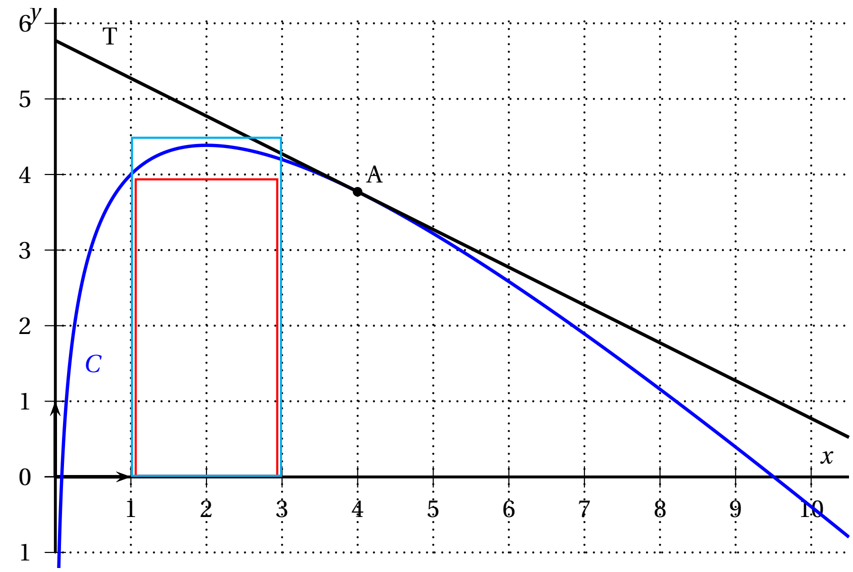
EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Comme somme de fonctions dérivables sur $I =]0\,;\,+\infty[$, f est dérivable sur I, et pour tout réel x de I,
$f'(x) = 0 - 1 + 2 \times \dfrac{1}{x} = -1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{-x+2}{x}$.
La bonne réponse est la **réponse c.**.
2. Sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, $f'(a) = 0$ lorsque la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.
C'est le cas une seule fois dans ce cas.
La bonne réponse est donc la **réponse b.**.
3. Comme f est dérivable sur I, elle l'est en 4 et T admet pour équation $y = f'(4)(x-4) + f(4)$.
Or, ici, $f(4) = 5 - 4 + 2\ln(4) = 1 + 2\ln(4)$ et $f'(4) = \dfrac{-4+2}{4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$.
La tangente T admet donc pour équation : $y = \dfrac{-1}{2}(x-4) + 1 + 2\ln(4)$, soit
$y = -\dfrac{1}{2}x + 3 + 2\ln(4)$.
La bonne réponse est la **réponse d.**.
4. Comme f est positive sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
On sait que, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{-x+2}{x}$.
On obtient donc le tableau suivant :

x	0		1		2		3		$+\infty$
$-x+2$			$+$		0		$-$		
x	0		$+$				$+$		
$f'(x)$	$\Vert$		$+$		0		$-$		
Variations de f	$\Vert$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\searrow$	

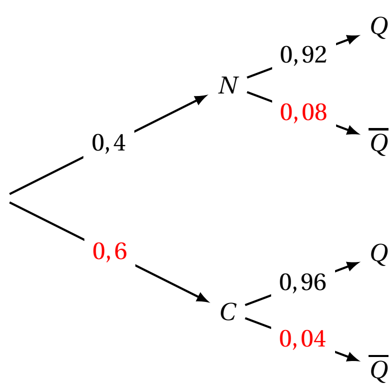
La fonction f a dont un maximum $f(2) = 5 - 2 + 2\ln 2 = 3 + 2\ln 2 \approx 4,386 < 4,5$.
De plus $f(3) = 5 - 3 + 2\ln(3) = 2 + 2\ln(3) \approx 4,20 > 4$.
Ainsi, sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, on a $4 \leqslant f(x) \leqslant 4,5$.
Donc cette intégrale est comprise entre l'aire de la surface grise (2×4) et l'aire de la surface hachurée $(2 \times 4,5)$.
Graphiquement, cette intégrale est comprise entre l'aire rouge et l'aire bleue.



On a donc $8 \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 9$.
La bonne réponse est la **réponse c.**.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats
Partie A

1. Voici un arbre qui convient. Les informations tirées de l'énoncé sont en noir.



2. $p(N \cap Q) = p(N) \times p_N(Q)$
$p(N \cap Q) = 0,4 \times 0,92$
$p(N \cap Q) = 0,368$.
En prenant un pneu au hasard dans le stock, la probablité de choisir un pneu neige qui a réussi les tests de qualité est de 0,368.
3. Les événements N et C forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales,
$p(Q) = p(N \cap Q) + p(C \cap Q)$
$p(Q) = p(N \cap Q) + p(C) \times p_C(Q)$
$p(Q) = 0,368 + 0,6 \times 0,96$
$p(Q) = 0,944$.

4. On cherche $p_Q(N)$.

Or, $p_Q(N) = \dfrac{p(N \cap Q)}{p(Q)}$

$p_Q(N) = \dfrac{0,368}{0,944}$

$p_Q(N) \approx 0,390$.

Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, la probabilité que ce pneu soit un pneu neige est environ de 0,390.

Partie B

1. On cherche $p(X < 25)$.

$\star$ **Première méthode**

On sait que $p(X < 25) = p(X < 30) - p(25 < X < 30) = 0,5 - p(25 < X < 30)$.

En déterminant $p(25 < X < 30)$ avec la calculatrice, cela donne :

$p(X < 25) \approx 0,266$

$\star$ **Deuxième méthode**

En remplaçant $p(X < 25)$ par $p\left(-10^{99} < X < 25\right)$, on obtient le même résultat.

$\star$ **Conclusion**

La probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres est environ de 0,266.

2. On cherche le réel d vérifiant $p(X > d) = 0,2$.

Or, $p(X > d) = 1 - p(X \leqslant d)$, donc $p(X > d) = 0,2$ équivaut à $p(X \leqslant d) = 0,8$.

La calculatrice donne $d \approx 36,733$.

Partie C

Posons $n = 900$ et $p = 0,85$.

Alors $n \geqslant 30$, $np = 900 \times 0,85 = 765 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 900 \times 0,15 = 135 \geqslant 5$.

Supposons que le taux de satisfaction reste le même que celui de l'année précédente.

En choisissant un échantillon aléatoire de 900 personnes parmi les clients, on a donc une probabilité de 95% d'avoir une fréquence, sur l'échantillon, de clients satisfaits appartenant à l'intervalle

$$\left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Or, $p - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,826$ (arrondi par défaut) et $p + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,874$ (arrondi par excès).

Sous l'hypothèse d'un taux de satisfaction maintenu, on obtient comme intervalle de fluctuation asymptotique pour la fréquence ce clients satisfaits sur un échantillon de 900 personnes l'intervalle $[0,826 \,;\, 0,874]$.

Sur l'échantillon, la fréquence de clients satisfaits est $f = \dfrac{735}{900} \approx 0,817$.

$f \notin [0,826 ; 0,874]$.

On rejète donc, au seuil de 95 %, l'hypothèse d'un taux de satisfaction maintenu.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Partie A

1. Augmenter de 6% revient à multiplier par 1,06.
   La raison de la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est $q = 1,06$.
   $u_1 = u_0 \times 1,06 = 500 \times 1,06 = 530$
   $u_2 = u_1 \times 1,06 = 530 \times 1,06 = 561,8 \approx 562$
2. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant géométrique de raison $q = 1,06$, on a, pour tout entier naturel n :
   $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_n = 500 \times 1,06^n$.
3. Comme $u_0 > 0$ et $q > 1$, on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1. Voici les lignes L3, L5 et L7 complétées :

L3 :	**Traitement**	Tant que $U < 1000$
L5 :		Affecter à U la valeur $U \times 1,06$
L7 :	**Sortie**	Afficher N

2. On cherche le premier entier n vérifiant $u_n \geqslant 1000$.

   Or, pour tout entier naturel n, $$\begin{aligned} u_n \geqslant 1000 &\iff 500 \times 1,06^n \geqslant 1000 \\ &\iff 1,06^n \geqslant 2 \\ &\iff \ln\left(1,06^n\right) \geqslant \ln(2) \\ &\iff n\ln(1,06) \geqslant \ln(2) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(1,06)}, \text{ car } \ln(1,06) > 0 \end{aligned}$$

   Or, $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1,06)} \approx 11,90$. C'est donc à partir du 12e mois que le nombre de films proposés dépassera le double du nombre de films proposés à l'ouverture.

Partie C

1. Diminuer de 10 % revient à multiplier par 0,9.
   Ainsi, on a bien, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 25000$.

   a. Pour tout entier naturel n, $$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 25000 \\ &= 0,9v_n + 2500 - 25000 \\ &= 0,9v_n - 22500 \\ &= 0,9\left(v_n - \frac{22500}{0,9}\right) \\ &= 0,9(v_n - 25000) \\ &= 0,9w_n \end{aligned}$$
   La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est donc bien une suite géométrique de raison $a = 0,9$.
   Son premier terme est $w_0 = v_0 - 25000 = 15000 - 25000 = -10000$.

   b. La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ étant géométrique, on a pour tout entier naturel n :
   $w_n = w_0 \times a^n$, soit $w_n = -10000 \times 0,9^n$.
   Comme, pour tout entier naturel n, on a $w_n = v_n - 25000$, on obtient :
   $v_n = w_n + 25000$, soit $v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$.

   c. Comme $0 < a < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(0,9^n\right) = 0$.
   Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 25000$.
   Le nombre d'abonnés va donc se stabiliser, sur le long terme, autour de 25000.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **a.** Le graphe Γ n'est pas complet, car par exemple, les sommets D et H ne sont pas adjacents.

   b. Le graphe Γ est connexe.

   Deux sommets quelconques du graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de celle-ci :

$$A-B-C-D-E-H-G-F$$

2. Voici les degrés des différents sommets du graphe Γ :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	4	3	4	3	2	3	2

Le graphe Γ, qui est connexe, possède 4 sommets de degré impair.

D'après le théorème d'Euler, ce graphe ne possède donc pas de chaîne eulérienne.

3. La matrice d'adjacence cherchée est :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

4. **a.** ⋆ Le coefficient $(2,8)$ de la matrice M est 0 ; on ne peut donc pas se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en un seul vol.

   ⋆ Le coefficient $(2,8)$ de la matrice M^2 est 0 ; on ne peut donc pas se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en deux vols.

   ⋆ Le coefficient $(2,8)$ de la matrice M^3 est 4 ; on peut donc se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en trois vols et il y a même 4 possibilités.

   Le nombre minimal de vols pour se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H est donc 3.

   b. Voici les trajets possibles :

$$B-A-E-H \quad ; \quad B-D-E-H \quad ; \quad B-C-G-H \quad ; \quad B-F-G-H$$

Partie B

Voici l'algorithme de Dijkstra utilisé sur ce graphe :

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0+40 40(A)	∞	0+100 100(A)	0+45 45(A)	∞	∞	∞	B
		40+110 150(B)	40+50 90(B)	45(A)	40+120 160(B)	∞	∞	E
		150(B)	45+40 85(E)		160(B)	∞	45+90 135(E)	D
		85+160 145(D)			160(B)	∞	135(E)	H
		145(D)			160(B)	135+80 215(H)		C
					160(B)	145+50 195(C)		F
						160+55 195(C)		G

Le trajet le moins cher est donc le trajet $A-E-D-C-G$ et coûte 195€.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f=0,4\dfrac{1}{v}+0,4$ avec, pour tout $x\in I=[0\,;8]$, $v(x)=20\,\mathrm{e}^{-x}+1$.

La fonction v est dérivable et strictement positive sur I.

Par conséquent, la fonction $\dfrac{1}{v}$, puis f sont également dérivables sur I.

$f'=0,4\times\left(\dfrac{-v'}{v^2}\right)+0$, avec pour tout $x\in I$, $v'(x)=20\times(-\,\mathrm{e}^{-x})=-20\,\mathrm{e}^{-x}$.

Donc, pour tout $x\in I$, $f'(x)=0,4\times\dfrac{-(-20\,\mathrm{e}^{-x})}{(20\,\mathrm{e}^{-x}+1)^2}=\dfrac{8\,\mathrm{e}^{-x}}{(20\,\mathrm{e}^{-x}+1)^2}$.

2. Le logiciel de calcul formel donne $g(x)=f''(x)=8\,\mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{20\,\mathrm{e}^{-x}-1}{(20\,\mathrm{e}^{-x}+1)^3}$.

Pour tout réel x, $8\,\mathrm{e}^{-x}>0$ et $(20\,\mathrm{e}^{-x})^3>0$, donc le signe de $g(x)$ est le même que celui de $20\,\mathrm{e}^{-x}-1$.

Or pour tout réel x, $20\,\mathrm{e}^{-x}-1>0 \Leftrightarrow 20\,\mathrm{e}^{-x}>1$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}>\frac{1}{20}$$
$$\Leftrightarrow -x>\ln\left(\frac{1}{20}\right)$$
$$\Leftrightarrow -x>-\ln(20)$$
$$\Leftrightarrow x<\ln(20)$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	0	$\ln(20)$	8
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Convexité de f	Convexe		Concave

La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

Partie B

Proposition 1
L'altitude du village B est 0,6 km : fausse.
$f(8) = \dfrac{0,4}{20\times\,\mathrm{e}^{-8}+1}+0,4 \approx 0,797.$
L'altitude du village B est environ de 0,797 km.
Proposition 2
L 'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre : vraie.

$$f(8)-f(0) = \dfrac{0,4}{20\times\,\mathrm{e}^{-8}+1}+0,4-\left(\dfrac{0,4}{20\times\,\mathrm{e}^{0}+1}+0,4\right) \approx 0,378.$$

L'écart d'altitude entre les villages A et B est bien environ de 378 mètres.
Proposition 3
La pente en A vaut environ 1,8 % : vraie.

$$f'(0) = \dfrac{8\,\mathrm{e}^{0}}{\left(20\,\mathrm{e}^{0}+1\right)^2} = \dfrac{8}{441} \approx 0,018 = 1,8\,\%.$$

La pente en A vaut bien environ 1,8 %.
Proposition 4
Le projet de route ne sera pas accepté : fausse.
Le maximum de f' est atteint en $x=\ln 20$, car f change de convexité en $\ln 20$ en passant de convexe à concave.
Or, $f'(\ln 20) = \dfrac{8\,\mathrm{e}^{-\ln 20}}{\left(20\,\mathrm{e}^{-\ln 20}+1\right)^2} = \dfrac{\frac{8}{20}}{2^2} \approx 0,1 = 10\,\% < 12\,\%.$
Par conséquent, la pente de la route sera toujours inférieure à 12 %.