∽ Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry ∾
21 avril 2016

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3x - x\ln x$.
   On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.
   $f'(x) = 3 - \left[1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x}\right] = 3 - \ln x - 1 = 2 - \ln x$ soit **la réponse c**

2. On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
   La somme des 13 premiers termes de cette suite est appelée S.
   On aura $S = 1 \times \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = 8\,191$ soit **la réponse b**

3. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;\,7]$.
   $P(X \geqslant 4) = P(4 \leqslant X \leqslant 7) = \dfrac{7-4}{5}$ et $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{5-2}{5}$ soit **la réponse b**

4. On réalise un sondage sur un échantillon de n personnes (n, entier naturel non nul). L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$; son amplitude vaut donc $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0,02 \iff n = 10\,000$ donc la bonne réponse est la **réponse c**.

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : Étude graphique

Voir graphique page 6.

1. La quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise correspond au minimum de la fonction C ; elle est égale à 4,5.
2. **a.** $C(6) = 5$ et $R(6) = 18$ donc $D(6) = 18 - 5 = 13$.
   Le résultat net pour une production de 6 tonnes est donc de 1 300 euros.

   b. L'entreprise réalise un bénéfice quand la production x est telle que le coût est strictement inférieur au rapport, c'est-à-dire quand $C(x) < R(x)$, autrement dit entre 2,8 et 13,3 tonnes.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par :
$g(x) = -0,6x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$.

1. **a.** La fonction g est dérivable $[1\,;\,15]$ et $g'(x) = -0,6 - \mathrm{e}^{-x+5}$.

   b. $\mathrm{e}^{-x+5} > 0$ quelle que soit la valeur de x donc $-\mathrm{e}^{-x+5} < 0$ et par suite, $g'(x) < 0$ comme somme de deux nombres strictement négatifs.
   La fonction g est donc strictement décroissante sur $[1\,;\,15]$

2. **a.** $g(1) \approx 58$ et $g(15) \approx -5$; on a donc le tableau de variation suivant :

x	1	α	15
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	58 ↘	0 ↘	-5

b. Le tableau de variation de g justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1\,;\,15]$;

$\left.\begin{array}{l} g(6) \approx 0,77 > 0 \\ g(7) \approx -0,06 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [6\,;\,7]$ $\left.\begin{array}{l} g(6,9) \approx 0,01 > 0 \\ g(7,0) \approx -0,06 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [6,9\,;\,7]$

Enfin $\left.\begin{array}{l} g(6,91) \approx 0,002 > 0 \\ g(6,92) \approx -0,005 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [6,91\,;\,6,92]$

Donc $\alpha \approx 6,9$ à 0,1 près.

c. On en déduit donc le tableau de signe suivant :

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie C : Application économique

1. $D(x) = R(x) - C(x) = 3x - \left(0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}\right) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$
2. $D'(x) = -0,3 \times 2x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5} = g(x)$
3. $D(1) \approx -50,9$, $D(\alpha) \approx 13,17$ et $D(15) \approx -7,5$;
   on aura donc le tableau de variation de la fonction D suivant :

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$D(x)$	$-50,9$	↗	$13,17$	↘	$-7,5$

4. **a.** L'entreprise rendra son bénéfice maximal pour une production de α tonnes soit environ $6,9$ tonnes

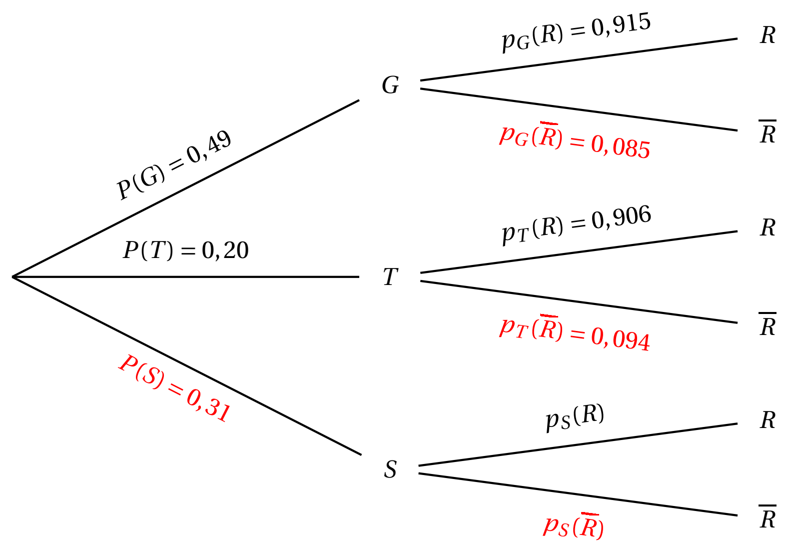
   b. Le bénéfice réalisé sera alors de 1 317 euros.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. En utilisant les données du texte, on a ; $P(G) = 0,49$, $P(T) = 0,20$, $P_T(R) = 0,906$ et $P_G(R) = 0,915$.
2. On peut donc construire l'arbre de probabilités (voir page 3).
3. On cherche $P(T \cap R)$: $P(T \cap R) = P(T) \times P_T(R) = 0,20 \times 0,906 = 0,1812$



4. **a.** On a $p(R) = 0,878$ et d'après les probabilités totales, comme G, T et S forment une partition de l'univers :
   $P(R) = P(G \cap R) + P(T \cap R) + p(S \cap R)$
   $= 0,49 \times 0,915 + 0,2 \times 0,906 + p(S \cap R) = 0,878$
   On aura alors : $p(S \cap R) = 0,878 - (0,49 \times 0,915 + 0,2 \times 0,906) = 0,24845$.

   b. On cherche $P_S(R)$: $P_S(R) = \dfrac{P(S \cap R)}{p(S)} = \dfrac{0,24845}{0,31} \approx 0,801$

Partie B

1. En utilisant la calculatrice, on a $P(9 \leqslant X_M \leqslant 16) = 0,68$.
   C'est un résultat du cours car $9 = 12,5 - 3,5 = m - \sigma$ et $16 = 12,5 + 3,5 = m + \sigma$.
2. — Sur le graphique 3, l'espérance de la loi X_M est supérieure à celui de la loi X_F car l'axe de symétrie de la courbe en pointillé est placé à droite de celui de la courbe pleine ; or $E(X_M) = 12,5$ et $E(X_F) = 13,2$ donc ce graphique ne convient donc pas.
   — Sur le graphique 1, la courbe correspondant à X_M a un sommet situé au dessus de celle correspondant à X_F donc l'écart type σ_M de la loi suivie par X_M doit être inférieur à celui σ_F de la loi suivie par X_F ; or $\sigma_M = 3,5$ et $\sigma_F = 2,1$ donc ce graphique ne convient pas.

   Le graphique qui correspond est donc le graphique n° 2.

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Ajouter 1,5 % revient à multiplier par 1,015 ; si on augmente les 5 700 euros du départ de 1,5 %, on obtient $5700 \times 1,015 = 5785,50$ euros. Comme on verse 300 euros, on obtient $u_1 = 5785,50 - 300 = 5485,50$ euros.

   b. De même $u_2 = 1,015u_1 - 300 = 5485,50 \times 1,015 - 300 \approx 5267,78$
2. La suite (u_n) est définie pour tout n par : $u_{n+1} = 1,015u_n - 300$.
   On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :    n est un entier naturel
               u est un nombre réel
Traitement :   Affecter à u la valeur 5 700
               Affecter à n la valeur 0
               Tant que u > 4500 faire
                    | u prend la valeur 1,015 × u − 300
                    | n prend la valeur n + 1
               Fin Tant que
Sortie :       Afficher n
```

a. On obtient le tableau ci-dessous :

valeur de u	5700	5 485,50	5 267,78	5 046,80	4 822,50	4 594,84	4 363,76
valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
$u > 4500$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

b. L'algorithme affiche à la fin de son exécution la valeur 6.
Au bout du sixième remboursement, le capital restant dû sera inférieur à 4 500 €.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n - 20000$; donc $u_n = v_n + 20000$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 20000 = 1,015u_n - 300 - 20000 = 1,015u_n - 20300$

$$= 1,015\left(u_n - \frac{20300}{1,015}\right) = 1,015\,(u_n - 20000) = 1,015 \times v_n$$

b. $v_0 = u_0 - 20000 = 5700 - 20000 = -14300$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $v_0 = -14300$.
D'après les propriétés des suites géométriques, on en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -14300 \times 1,015^n$.
Comme $u_n = v_n + 20000$, on déduit que $u_n = 20000 - 14300 \times 1,015^n$, pour tout n.

4. a. Le 26 avril 2017 correspond à $n = 15$.
$u_{15} = 20000 - 14300 \times 1,015^{15} \approx 2121,68$ euros

b. On cherche n pour que $u_n = 0$:
$u_n = 0 \iff 20000 - 14300 \times 1,015^n = 0 \iff 14300 \times 1,015^n = 20000$

$$\iff 1,015^n = \frac{20000}{14300} \iff n \ln 1,015 = \ln\left(\frac{20000}{14300}\right) \iff n \approx 23$$

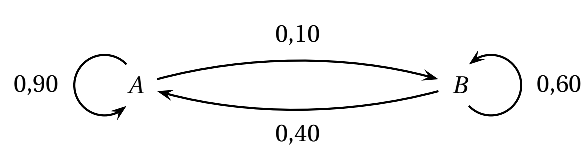
La dernière mensualité sera la 23e.

c. Le nombre u_{22} représente le capital à rembourser après avoir payé la 22e mensualité, donc le montant de la 23e et dernière mensualité.
On a $u_{22} = 20000 - 14300 \times 1,015^{22} \approx 157,84$ euros.
Le montant de la 23e et dernière mensualité est de $157,84 \times 1,015 \approx 160,21$ euros.

d. Le montant du remboursement sera de 22 mensualités de 300 euros auquel il faut rajouter 160,21 euros soit un montant total de $300 \times 22 + 160,21 = 6760,21$ euros.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. D'après le texte : $\left\{\begin{array}{l c l} a_{n+1} & = & 0,9\,a_n+0,4\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,1\,a_n+0,6\,b_n \end{array}\right.$

   Ce qui équivaut à : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6\end{pmatrix}$

   La matrice de transition M associée à ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6\end{pmatrix}$

3. **a.** On trouve à la calculatrice $M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25\end{pmatrix}$

   b. La probabilité que la personne interrogée fasse son 5^e^ achat sur internet est a_5.
   D'après le cours, on sait que, pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = P_1 \times M^{n-1}$ donc
   $P_5 = P_1 \times M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875\end{pmatrix}$;
   on en déduit que $a_5 = 0,8125$ et $b_5 = 0,1875$.
   La probabilité que la personne interrogée fasse son 5^e^ achat sur internet est donc 0,8125.

4. On note $P = \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

   a. Comme P est un état du système, on peut dire que $a+b=1$.
   P est un état stable donc $P = P \times M$ ce qui équivaut à :
   $\begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a+0,4b & 0,1a+0,6b\end{pmatrix} \iff$
   $\left\{\begin{array}{l c l} a & = & 0,9a+0,4b \\ b & = & 0,1a+0,6b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} 0 & = & -0,1a+0,4b \\ 0 & = & 0,1a-0,4b \end{array}\right. \iff 0,1a-0,4b=0$
   Donc a et b vérifient le système $\left\{\begin{array}{r c r c l} 0,1a & - & 0,4b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$

   b. $\left\{\begin{array}{r c r c l} 0,1a & - & 0,4b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} 0,1a & = & 0,4b \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} a & = & 4b \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} a & = & 4b \\ 4b+b & = & 1 \end{array}\right.$
   $\iff \left\{\begin{array}{l c l} a & = & 4b \\ b & = & 0,2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} a & = & 0,8 \\ b & = & 0,2 \end{array}\right.$

   c. À long terme, la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet tend vers a donc vers $0,8$.

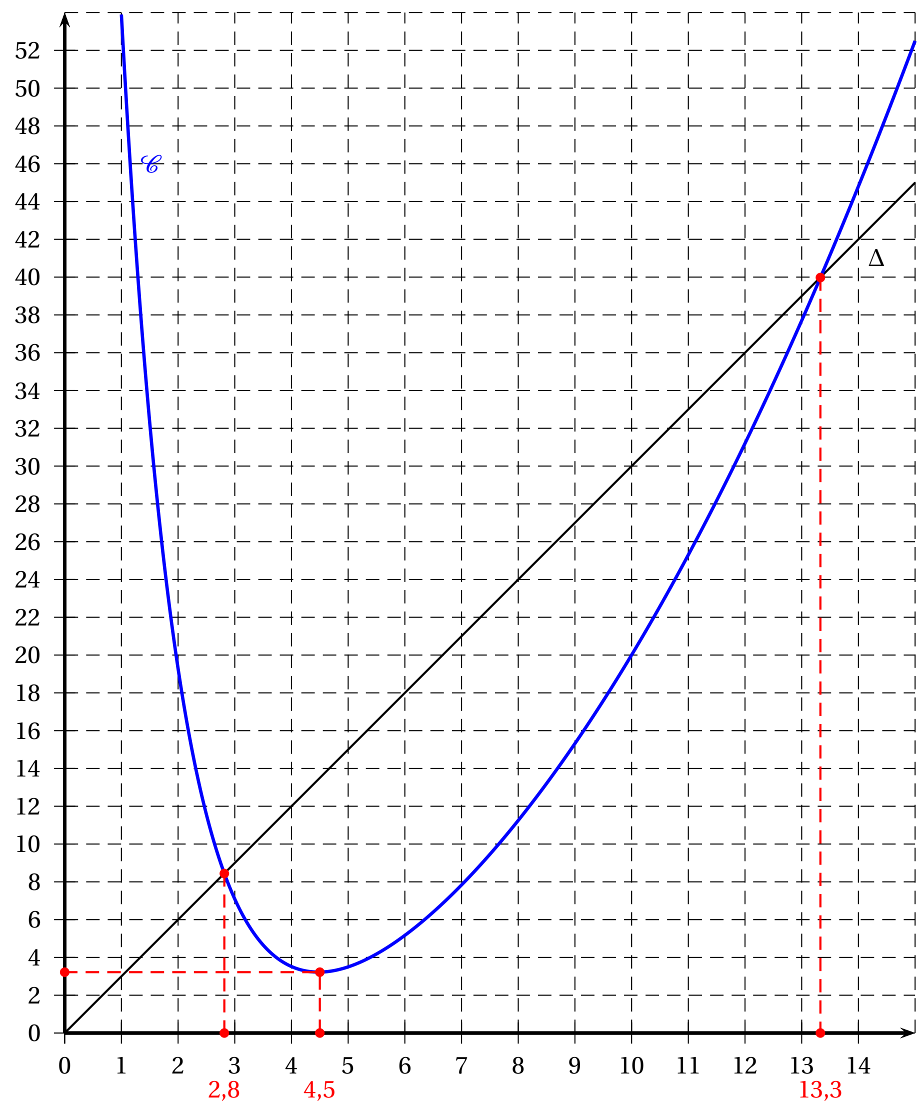
5. **a.** D'après le contexte, on peut dire que, pour tout n, $a_n+b_n=1$ donc $b_n = 1-a_n$.
   On sait également que, pour tout n, $a_{n+1} = 0,9a_n+0,4b_n$; donc $a_{n+1} = 0,9a_n+0,4(1-a_n) = 0,9a_n+0,4-0,4a_n = 0,5a_n+0,4$

   b. On complète l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0,801$.

Variables :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que $A > 0,801$
	Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Affecter à N la valeur $N+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

   c. À la calculatrice, on trouve :
   $P_8 = P_1 \times M^7 \approx \begin{pmatrix} 0,801 & 0,1984\end{pmatrix}$ et $P_9 = P_1 \times M^8 \approx \begin{pmatrix} 0,8008 & 0,1992\end{pmatrix}$
   Donc la valeur affichée en sortie est 9.

ANNEXE



52
50
48
46
44
42
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
$\mathscr{C}$
Δ
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
2,8
4,5
13,3