

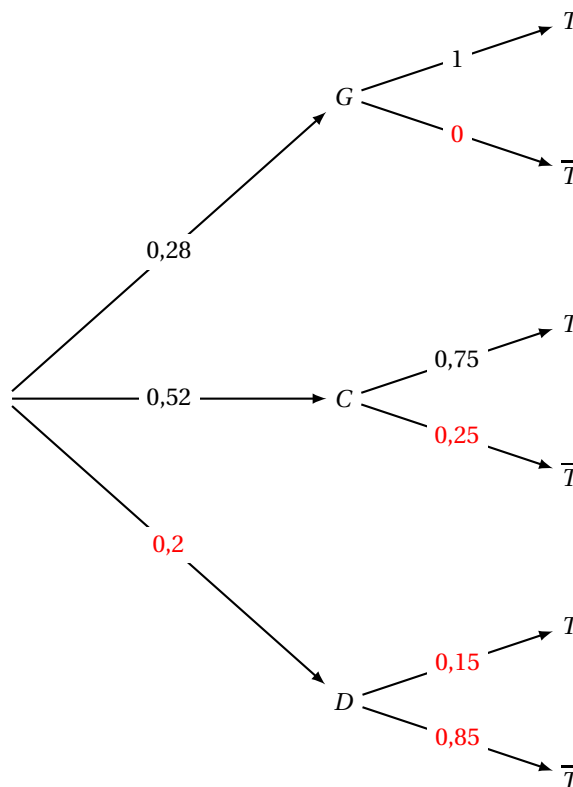
~ Corrigé du baccalauréat ES/L Amérique du Nord ~
 1^{er} juin 2016

Exercice 1
Commun à tous les candidats

5 points

Partie A

1. Voici un arbre qui convient (les données du texte sont en noir) :



2. $p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T)$

$p(C \cap T) = 0,52 \times 0,75$

$p(C \cap T) = 0,39.$

3. a. G, C et D forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on obtient donc :

$p(T) = p(G \cap T) + p(C \cap T) + p(D \cap T)$

puis, successivement :

$p(D \cap T) = p(T) - p(G \cap T) - p(C \cap T)$

$p(D \cap T) = p(T) - p(G) \times p_G(T) - p(C \cap T)$

$p(D \cap T) = 0,7 - 0,28 \times 1 - 0,39$

$p(D \cap T) = 0,03.$

b. On cherche $p_D(T)$.

$$\text{Or, } p_D(T) = \frac{p(D \cap T)}{p(D)}$$

$$p_D(T) = \frac{0,03}{0,2}$$

$$p_D(T) = \frac{3}{20} = 0,15$$

La probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes est de 0,15.

Partie B

1. La calculatrice donne $p(120 < V < 130) \approx 0,409$.

2. On cherche $p(V \geq 138)$.

★ 1^{re} méthode

On sait que $p(V > 120) = 0,5$.

Comme $p(V \geq 138) = p(V > 120) - p(120 < V < 138)$, on obtient :

$$p(V \geq 138) \approx 0,5 - 0,492$$

$$p(V \geq 138) \approx 0,008.$$

★ 2^e méthode

En remplaçant $p(V \geq 138)$ par $p(138 \leq V \leq 10^{99})$, la calculatrice, donne :

$$p(V \geq 138) \approx 0,008.$$

★ **Conclusion**

La probabilité qu'un automobiliste soit sanctionné est environ de 0,008.

Exercice 2

5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

1. Diminuer de 8% revient à multiplier par 0,92.

On obtient donc le nombre d'abonnés au 1^{er} février 2016 en effectuant le calcul suivant :

$$4000 \times 0,92 + 8000 = 11680.$$

Le nombre d'abonnés au 1^{er} février 2016 est de 11 680.

2. a. On obtient le tableau suivant

| | | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Valeur de U | 4 | 11,7 | 18,7 | 25,2 | 31,2 | 36,7 | 41,8 |
| Valeur de N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Condition $U < 40$ | vraie | vraie | vraie | vraie | vraie | vraie | fausse |

b. La valeur affichée en sortie sera 6.

Il s'agit du premier mois à partir duquel le nombre d'abonnés est supérieur ou égal à 40 000.

Le nombre d'abonnés devient donc supérieur ou égal à 40 000 au 1^{er} juillet 2016.

3. a. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 100$

$$= 0,92u_n + 8 - 100$$

$$= 0,92u_n - 92$$

$$= 0,92(u_n - 100)$$

$$= 0,92v_n$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,92$.

$$v_0 = u_0 - 100 = 4 - 100 = -96$$

Son premier terme est $v_0 = -96$.

- b. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n$, soit $v_n = (-96) \times 0,92^n$.
- c. Comme, pour tout entier naturel n , on a $v_n = u_n - 100$, alors $u_n = v_n + 100$.
En utilisant la question précédente, on obtient donc, pour tout entier naturel n :
 $u_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.
4. On cherche le premier entier naturel n vérifiant $u_n > 70$.

$$\begin{aligned} \text{Or, pour tout entier naturel } n, u_n > 70 &\Leftrightarrow 100 - 96 \times 0,92^n > 70 \\ &\Leftrightarrow -96 \times 0,92^n > -30 \\ &\Leftrightarrow 0,92^n < 0,3125 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,92^n) < \ln(0,3125) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,92) < \ln(0,3125) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,3125)}{\ln(0,92)} \end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln(0,3125)}{\ln(0,92)} \approx 13,95$. Le premier entier qui convient est donc 14.

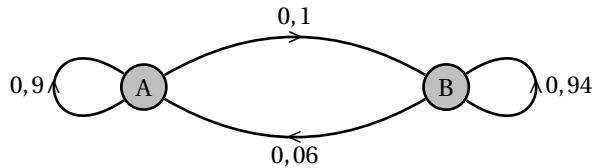
C'est donc au 1^{er} mars 2017 que le nombre d'abonnés deviendra supérieur à 70 000.

Exercice 2

5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. La situation peut être représentée par l'arbre probabiliste ci-dessous :



- b. La matrice de transition correspondante est : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$.
- c. $P_1 = P_0 \times M$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = (1 \times 0,9 + 0 \times 0,06 \quad 1 \times 0,1 + 0 \times 0,94)$$

$$P_1 = (0,9 \quad 0,1).$$
2. L'algorithme qui convient est l'algorithme 2.
En effet, dans l'algorithme 1, le relation de récurrence utilisée pour passer de b_n à b_{n+1} est $b_{n+1} = 0,1 \times a_{n+1} + 0,94 \times b_n$,
car la valeur de la variable a a été modifiée à la ligne « a prendre la valeur $0,9 \times a + 0,06 \times b$ » avant le calcul de b .
3. a. Pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.
Or, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 1$, donc $b_n = 1 - a_n$.
On obtient donc, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n)$,
soit $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.
- b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,375$

$$= 0,84a_n + 0,06 - 0,375$$

$$= 0,84a_n - 0,315$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,84 \left(a_n - \frac{0,315}{0,84} \right) \\
 &= 0,84(a_n - 0,375) \\
 &= 0,84u_n
 \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,84$.

Son premier terme est $u_0 = a_0 - 0,375 = 1 - 0,375 = 0,625$.

- c. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_n = 0,625 \times 0,84^n$.

Comme, pour tout entier naturel n , $u_n = a_n - 0,375$, alors $a_n = u_n + 0,375$.

En utilisant ce qui précède, on obtient donc $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$.

4. On cherche le premier entier naturel n tel que $a_n < 0,5$.

$$\begin{aligned}
 \text{Or, pour tout entier naturel } n, a_n < 0,5 &\Leftrightarrow 0,375 + 0,625 \times 0,84^n < 0,5 \\
 &\Leftrightarrow 0,625 \times 0,84^n < 0,125
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0,84^n < \frac{0,125}{0,625}$$

$$\Leftrightarrow 0,84^n < 0,2$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,84^n) < \ln(0,2)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,84) < \ln(0,2)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,84)}$$

$$\text{Or, } \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,84)} \approx 9,23.$$

Le premier entier qui convient est donc 10.

C'est donc à partir de 2020 que la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50%.

Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre réel choisi au hasard dans l'intervalle $[10; 50]$. X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[10; 50]$.

La probabilité cherchée est donc $p(15 \leq X \leq 20)$. Or,

$$p(15 \leq X \leq 20) = \int_{15}^{20} \frac{1}{40} dx$$

$$p(15 \leq X \leq 20) = \frac{20 - 15}{40}$$

$$p(15 \leq X \leq 20) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

La bonne réponse est la **réponse b.**

2. On cherche le réel t compris entre 0 et 100 tel que $200 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2 = 100$.

$$\text{Pour tout réel } t \in [0; 100], 200 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2 = 0,5$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{t}{100} = \sqrt{0,5}, \text{ car } t \leq 100$$

$$\Leftrightarrow t = 100(1 - \sqrt{0,5})$$

Or, $100(1 - \sqrt{0,5}) \approx 29,29$.

La bonne réponse est donc la **réponse c.**

3. Graphiquement, on obtient que $f(x) \leq 0$ sur $[0; 2]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[2; 18]$.

Les primitives de f sont donc décroissantes sur $[0; 2]$ et croissantes sur $[2; 18]$.

La bonne réponse est la **réponse d.**

4. Un intervalle de confiance, au seuil de 95%, est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$,

où f est la fréquence des personnes, sur l'échantillon, déclarant vouloir voter pour le candidat A et n la taille de l'échantillon.

Ici, on a $f = 0,535$, $f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,51$ et $f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,56$.

$f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,51$ donne $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,535 - 0,51 = 0,025$,

soit $\sqrt{n} = \frac{1}{0,025} = 40$, puis $n = 40^2 = 1600$.

La bonne réponse est la **réponse c.**

Exercice 4

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

1. a. Comme somme et produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $I =]0; 1,5]$, f est dérivable sur I .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in I, f'(x) &= 18x \times [1 - 2\ln(x)] + 9x^2 \times \left(-2 \times \frac{1}{x}\right) + 0 \\ &= 18x - 36x\ln(x) - \frac{18x^2}{x} \\ &= 18x - 36x\ln(x) - 18x \\ &= -36x\ln(x) \end{aligned}$$

- b. On obtient le tableau suivant :

| | | | |
|-------------------|---|----|----------|
| x | 0 | 1 | 1.5 |
| $-36x$ | 0 | - | - |
| $\ln(x)$ | | 0 | + |
| $f'(x)$ | | 0 | - |
| Variations de f | | 19 | $f(1.5)$ |

avec $f(1,5) \approx 18,83$.

- c. Voir la question précédente.

2. Pour tout $x \in I$, $-36\ln(x) - 36 \geq 0 \Leftrightarrow -36\ln(x) \geq 36$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{36}{-36}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

On obtient le tableau suivant :

| | | | |
|------------------|---------|----------|---------|
| x | 0 | e^{-1} | 1.5 |
| $f''(x)$ | | + | - |
| Convexité de f | Convexe | | Concave |

3. a. Comme somme et produit de fonctions dérivables sur I, F est dérivables sur I, et, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = 10 + 5 \times 3x^2 - \left(6 \times 3x^2 \ln(x) + 6x^3 \times \frac{1}{x} \right)$$

$$F'(x) = 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln(x) - \frac{6x^3}{x}$$

$$F'(x) = 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln(x) - 6x^2$$

$$F'(x) = 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln(x)$$

$$F'(x) = 10 + 9x^2 [1 - 2\ln(x)]$$

$$F'(x) = f(x)$$

F est bien une primitive de f sur I.

b. $\int_1^{1,5} f(x) dx = F(1,5) - F(1)$

On obtient : $\int_1^{1,5} f(x) dx \approx 8,66.$

Partie B : Application économique

Proposition 1 :

« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur. »

La période des six derniers mois correspond à l'intervalle $[1 ; 1,5]$.

Or, $f(1) = 19$ et $19 \times 0,75 = 14,25 > f(1,5)$, d'après la question **A. 2. c.**

La proposition est donc vraie.

Proposition 2 :

« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 €. »

La valeur moyenne de l'action sur les six derniers mois correspond à $\frac{1}{1,5-1} \int_1^{1,5} f(x) dx,$

soit $\frac{1}{0,5} \int_1^{1,5} f(x) dx = 2 \times \int_1^{1,5} f(x) dx.$

En utilisant la valeur obtenue à la question **A. 3. b.**, on obtient une valeur moyenne d'environ 17,33, soit strictement supérieure à 17 €.

La proposition est donc fausse.