Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord 31 mai 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Q1 : on sait que la limite est égale à zéro.

Q2 : $\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right)' = \frac{1}{2} \times 2x\mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{x^2}$.

Q3 : $x\ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Q4 : $\mathrm{e}^{-2\ln 5} = \frac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 5}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5^2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 25}} = \frac{1}{25}$.

Q5 : En posant $\mathrm{e}^x = X$, l'équation devient $X = \frac{16}{X} \iff X^2 = 16$ qui a pour solution $X = 4\mathrm{e}^x \iff x = \ln 4$ et $X = -4 = \mathrm{e}^x$ mais cette équation n'a pas de solution. Donc une solution.

Q6 : $x\ln(0,2) - 5 \geqslant 0 \iff x\ln(0,2) \geqslant 5 \iff x \leqslant \frac{5}{\ln 0,2}$ (car $\ln 0,2 < 0$).

L'ensemble des solutions est donc $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{\ln 0,2}\right]$.

Q7 : $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,4 + 0,3 - 0,2 = 0,5$.

Q8 : On a $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) \iff P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) = P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.

Q9 : $P\left(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}\right) = 1 - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

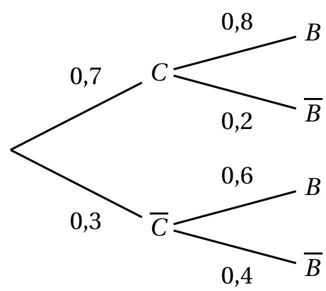
Q10 : $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B} = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à 10^{-2} *près.*

On peut faire un arbre :



1. $p\left(\overline{C} \cap B\right) = 0,18$ (énoncé) et $p\left(\overline{C}\right) = 0,3$ (énoncé)

2. On a $p_{\overline{C}}(B) = \dfrac{p\left(\overline{C} \cap B\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,18}{0,3} = \dfrac{18}{30} = \dfrac{6}{10} = 0,6$.

3. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
   $p(B) = p(B \cap C) + p\left(B \cap \overline{C}\right) = 0,7 \times 0,8 + 0,18 = 0,56 + 0,18 = 0,74$.

   b. La recette prévisible avec 1 000 touristes dont 74 % prennent une boisson à 2 € est :
   $1\,000 \times 2 \times 0,74 = 1\,480$ €.

4. **a.** Les valeurs possibles sont :
   – visite seule à pied : $d = 4$;
   – visite à pied et boisson : $d = 6$;
   – visite en car seule : $d = 7$;
   – visite en car et boisson : $d = 9$.

b. On trouve les probabilités associées à la variable aléatoire d facilement en remontant de bas en haut l'arbre dressé au début de l'exercice :

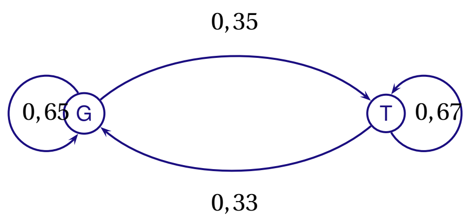
d	4	6	7	9
p	$0,3\times 0,4=0,12$	$0,3\times 0,6=0,18$	$0,7\times 0,2=0,14$	$0,7\times 0,8=0,56$

c. On $\mathrm{E}(d)=0,12\times 4+0,18\times 6+0,14\times 7+0,56\times 9=0,48+1,08+0,98+5,04=7,58$ €.
Pour un grand nombre de touristes la dépense moyenne sera de 7,58 € par touriste.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité

1. $P_1=\begin{pmatrix}0,15 & 0,85\end{pmatrix}$.

2. a.



b. En respectant l'ordre alphabétique des sommets la matrice de transition associée à ce graphe est $M=\begin{pmatrix}0,65 & 0,35\\0,33 & 0,67\end{pmatrix}$.

3. On a $P_3=P_1\times M^2=\begin{pmatrix}0,15 & 0,85\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,65 & 0,35\\0,33 & 0,67\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0,15 & 0,85\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,538 & 0,462\\0,4356 & 0,5644\end{pmatrix}^2=$
$\begin{pmatrix}0,45096 & 0,54904\end{pmatrix}$.
Cela signifie que le 3^e^ jour environ 45,1 % des membre du personnel seront favorables à la grève.

4. a. Les termes de la matrice de transition n'étant pas nuls on sait que quel que soit l'état initial l'était P_n converge vers un état stable $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, avec $x+y=1$ qui vérifie : $P=P\times M$ soit :
$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,65 & 0,35\\0,33 & 0,67\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}x&=&0,65x+0,33y\\y&=&0,35x+0,67y\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}0,35x-0,33y&=&0\\-0,35x+0,33y&=&0\end{array}\right.$
Ainsi on a : $x=0,65x+0,33y$.

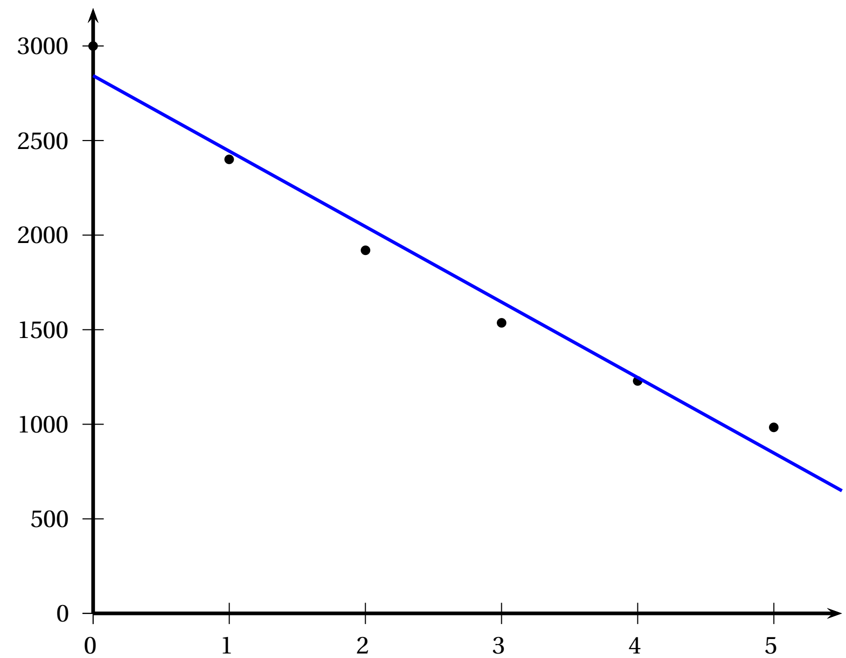
b. On a donc le système :
$\left\{\begin{array}{lcl}0,35x-0,33y&=&0\\x+y&=&1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}0,35x-0,33y&=&0\\y&=&1-x\end{array}\right.\iff$
$\left\{\begin{array}{lcl}0,35x-0,33(1-x)&=&0\\y&=&1-x\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}0,68x-0,33&=&0\\y&=&1-x\end{array}\right.\iff$
$\left\{\begin{array}{lcl}0,68x&=&0,33\\y&=&1-x\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{33}{68}\\y&=&1-\frac{33}{68}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{33}{68}\\y&=&\frac{35}{68}\end{array}\right.$.
On a $x=\frac{33}{68}\approx 0,485$ et $y=\dfrac{35}{68}\approx 0,515$.

c. Le résultat précédent montre que sur le long terme environ 48,5 % des membres du personnel continueront à souhaiter la grève.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

A. Ajustement affine

1.



2. Le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation est égal à $\dfrac{3\,000-1\,536}{3\,000}\times 100=\dfrac{1\,464}{3\,000}\times 100=48,8\,\%$.

3. La calculatrice donne $y=-399x+2\,843$.

B. Ajustement non affine

On pose $z=\ln(y)$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par : $z=-0,22x+8,01$.

1. On a $z=\ln y=-0,22x+8,01 \iff y=\mathrm{e}^{-0,22x+8,01}=\mathrm{e}^{-0,22x}\times\mathrm{e}^{8,01}$.
Or $\mathrm{e}^{8,01}\approx 3\,010,9$ soit à l'unité près $3\,011$.
Finalement $y=3\,011\mathrm{e}^{-0,22x}$.
On a également $\mathrm{e}^{-0,22x}=\mathrm{e}^{-0,22^x}\approx 0,8^x$.
Donc on peut écrire $y=3\,011\times 0,80^x$.

2. Le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 euros si

$3\,0110,80^x\leqslant 500 \iff 0,80^x\leqslant\dfrac{500}{3\,011} \iff x\ln 0,8\leqslant \ln\frac{500}{3\,011} \iff x\geqslant\dfrac{\ln\frac{500}{3\,011}}{\ln 0,8}$ (car $\ln 0,8<0$).

La calculatrice donne $\dfrac{\ln\frac{500}{3\,011}}{\ln 0,8}\approx 8,05$.
Il faudra donc attendre 9 ans pour que le prix de revente soit inférieur à 500 €.

C Comparaison des ajustements

Au bout de 6 ans le prix de revente :
– avec l'ajustement affine est égal à $-399\times 6+2\,843=449$ €.
– avec l'ajustement exponentiel $0,80^6\times 3\,011\approx 789$ (€).
C'est donc l'ajustement affine qui est le plus pertinent.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

A. Étude d'une fonction f

1. On a $f(x) = \ln[r(x)] = \ln\left[(900x)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)}\right] = \ln 900 + \ln x - 0,1(x-2)$.
2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,12]$ et sur cet intervalle
$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 0,1 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{10-x}{10x}$.
3. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $10 - x$, donc :
– si $x < 10$, $f'(x) > 0$, donc la fonction est croissante sur $[0\,;\,10[$;
– si $x > 10$, $f'(x) < 0$, donc la fonction est décroissante sur $]10\,;\,12]$
– $f'(10) = 0$, $f(10)$ est le maximum de f sur $[0\,;\,12]$.
4. Comme $f(x) = \ln[r(x)]$, alors $f'(x) = \dfrac{r'(x)}{r(x)}$
Comme la fonction r est positive sur $[0\,;\,12]$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $r'(x)$.
5. On a donc les variations suivantes de r :
– si $x < 10$, $r'(x) > 0$, donc la fonction est croissante sur $[0\,;\,10[$;
– si $x > 10$, $r'(x) < 0$, donc la fonction est décroissante sur $]10\,;\,12]$
– $r'(10) = 0$, $r(10)$ est le maximum de f sur $[0\,;\,12]$.
6. D'après le résultat précédent la fonction r atteint un maximum pour $x_0 = 10$ et ce maximum est $r(x_0) = r(10) = 900 \times 10\mathrm{e}^{-0,1(10-2)} = 9\,000\mathrm{e}^{-0,8} \approx 4\,043{,}96$.

B. Calcul de la valeur moyenne

1. Sur $[0\,;\,12]$, R est dérivable et :
$R'(x) = -9\,000\mathrm{e}^{-0,1(x-2)} - 9\,000(x+10) \times (-0,1)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)} = -9\,000\mathrm{e}^{-0,1(x-2)} + 900(x+10)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)} =$
$900\mathrm{e}^{-0,1(x-2)}(-10 + x + 10) = 900x\mathrm{e}^{-0,1(x-2)} = r(x)$.
2. $r_m = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} r(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{12}[R(x)]_0^{12} = \dfrac{1}{12}[R(12) - R(0)] =$
$\dfrac{1}{12}\left[-9\,000(12+10)\mathrm{e}^{-0,1(12-2)} + 9\,000(0+10)\mathrm{e}^{-0,1(0-2)}\right] =$
$\dfrac{1}{12}\left[-9\,000 \times 22\mathrm{e}^{-0,1\times(10)} + 9\,000 \times 10\mathrm{e}^{-0,1(-2)}\right] = 1\,500\left(5\mathrm{e}^{0,2} - 11\mathrm{e}^{-11}\right)$.
On a $r_m \approx 3\,090{,}51$.