Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord 31 mai 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. A et B sont indépendants donc $p(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.
2. La probabilité d'avoir pile est $\dfrac{2}{3}$. La probabilité de n'avoir que des pile est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$, donc la probabilité d'avoir au moins une fois face est égale $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{3^4-2^4}{3^4} = \dfrac{81-16}{81} = \dfrac{65}{81}$.
3. On a $p(\mathrm{F}) = 1-0,2 = 0,8$
$p_{\mathrm{E}}(\mathrm{H}) = 1-0,6 = 0,4$; $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{H}) = 1-0,3 = 0,7$;
$p(\mathrm{E}\cap\mathrm{H}) = p_{\mathrm{E}} \times p_{\mathrm{E}}(\mathrm{H}) = 0,2\times 0,4 = 0,08$;
$p(\mathrm{F}\cap\mathrm{H}) = p_{\mathrm{F}} \times p_{\mathrm{F}}(\mathrm{H}) = 0,8\times 0,7 = 0,56$.
Donc $p(\mathrm{H}) = p(\mathrm{E}\cap\mathrm{H}) + p(\mathrm{F}\cap\mathrm{H}) = 0,08+0,56 = 0,64$.
Enfin $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})}{p(\mathrm{H})} = \dfrac{0,56}{0,64} = \dfrac{56}{64} = \dfrac{7}{8} = 0,875$.
4. L'évènement contraire est : « obtenir n boules de la même couleur ».
La probabilité de tirer un boule blanche est $\dfrac{1}{2}$, donc la probabilité de tirer n boules blanches est $\dfrac{1}{2^n}$.
La probabilité de tirer un boule noire est $\dfrac{1}{2}$, donc la probabilité de tirer n boules noires est $\dfrac{1}{2^n}$.
Donc la probabilité de tirer n noires ou n blanches est : $\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Finalement la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur est égale à $1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** F semble être décroissante sur [0,5; 1] de $-1,5$ à -2, puis croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ de -2 à plus l'infini.
   b. $f(1) = F'(1)$ nombre dérivé en 1 de F, donc égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, donc $f(1) = 0$.
   $F(1) = -2$ et $F(3) = 0$.
   c. Si f est la dérivée de F, alors F est une primitive de f, donc :
   $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3)-F(1) = 0-(-2) = 2$ unités d'aire.
2. **a.** Comme $\mathrm{e}^{2x-1} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f_1(x)$ est celui de x^2-x+1 ; c'est un trinôme du second degré ; $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, donc le trinôme n'a pas de racines : il est donc du signe de $a = 1$, soit positif pour tout réel de J. Donc sur J, $f_1(x) > 0$.
   b. $f_2(x) = 0 \iff \ln(2x-1) = 0 \iff 2x-1 = 1 \iff 2x = 2 \iff x = 1$. Donc $f_2(1) = 0$
   c. $f_3(1) = -1+\dfrac{1}{2-1} = -1+1 = 0$.
   d. $\displaystyle\int_1^3 f_3(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left[-1+\dfrac{1}{2x-1}\right]\mathrm{d}x = \left[-x+\dfrac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^3 =$
   $-3+\dfrac{1}{2}\ln(2\times 3-1)-\left(-1+\dfrac{1}{2}\ln(2\times 1-1)\right) = -3+\dfrac{1}{2}\ln 5+1 = \dfrac{1}{2}\ln 5-2$

e. • f_1 ne peut être égale à f car elle est positive et f est négative sur $[0,5\,;\,1]$.

• f_3 ne peut être égale à f car les intégrales de ces deux fonctions sur $[1\,;\,3]$ ne sont pas égales.

• Reste f_2 qui s'annule en 1, comme f.

De plus $\ln(2x-1) > 0 \iff \ln(2x-1) > \ln 1 \iff 2x-1 > 1 \iff x > 1$ et de même $\ln(2x-1) < 0 \iff \ln(2x-1) < \ln 1 \iff 2x-1 < 1 \iff x < 1$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Première Partie : Étude d'un graphe

1. a. Le graphe est connexe car la chaîne Z–A–B–F–E–H–G–D–C–Y contient tous les sommets : il existe donc toujours un chemin reliant deux points quelconques du graphe.

b. On a le tableau suivant

sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	Y	Z
degré	4	4	4	4	4	2	4	2	3	1

c. On sait qu'un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.

Le graphe a deux sommets (Y et Z) de degré impair, donc il existe une chaîne eulérienne.

2. a. Soit γ le nombre chromatique.

Comme le plus haut degré est 4, on a $\gamma \leqslant 5$.

De plus {A, C, Y} est un sous-graphe complet d'ordre 3, donc $\gamma \geqslant 3$.

Finalement : $3 \leqslant \gamma \leqslant 5$.

b. On peut en fait trouver une coloration avec trois couleurs :

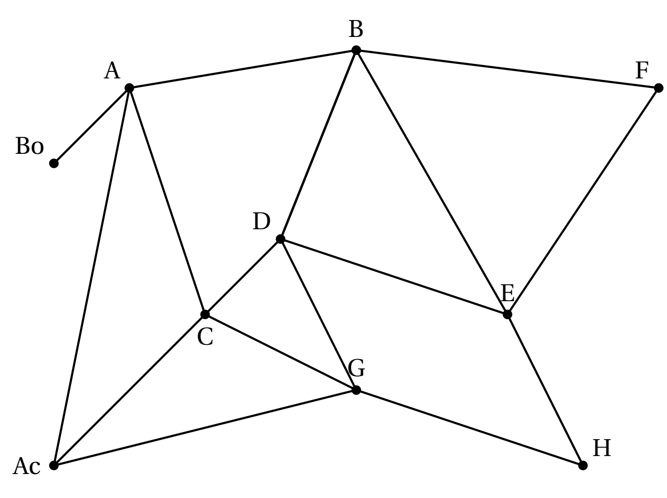
Couleur 1 : Z, B, C ;

Couleur 2 : A, E, G ;

Couleur 3 : D, F, Y. Donc $\gamma = 3$.

Deuxième Partie : Visite d'un musée

1.



2. **a.** On a vu qu'il existe une chaîne eulérienne, donc il est possible de passer chaque porte une seule fois.

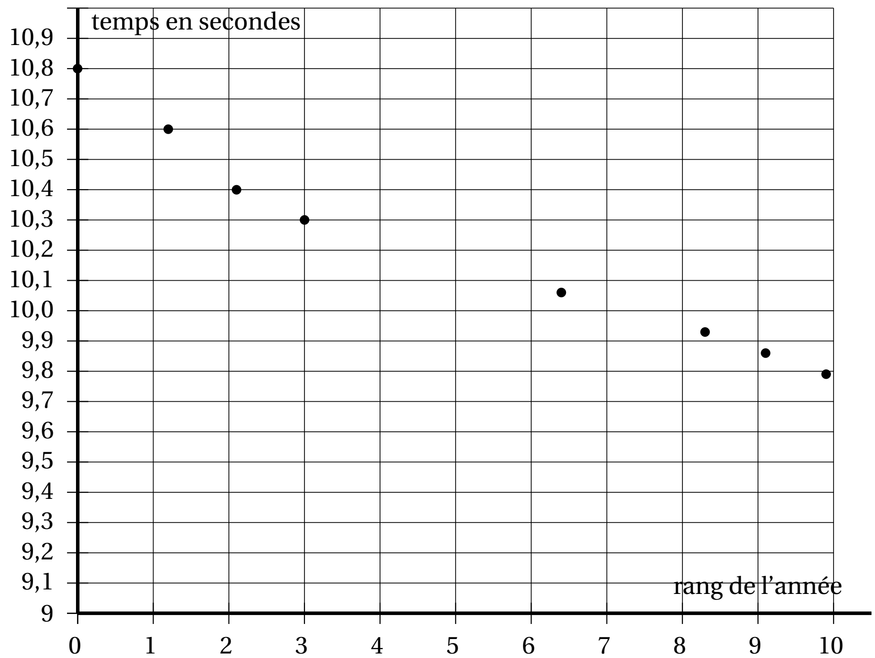
   b. Ac–C–G–Ac–A–B–F–E–B–D–G–H–E–D–C–A–Bo

3. Le nombre chromatique est égal à 3, donc 3 couleurs suffisent.
   Couleur 1 : Bo–B–C–H ;
   Couleur 2 : A–E–G ;
   Couleur 3 : Ac–D–F.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. **Étude d'un modèle affine**

   a.



   b. Le nuage de points est allongé : on peut penser à un ajustement affine, mais la prévision à long terme n'est pas pertinente puisqu'elle conduirait à un temps nul pour parcourir 100 m, ce qui est est impossible.

2. **Étude d'un modèle exponentiel**

   a. La calculatrice donne $Y = 0,154X + 2,221$.

   b. $Y = 0,154X + 2,221 \iff \ln y = 0,154 \times \mathrm{e}^{-0,00924x} + 2,221 \iff y = \mathrm{e}^{0,154\times\mathrm{e}^{-0,00924x}+2,221}$.

   c. 2010 correspond au rang 110, d'où :
   $y = \mathrm{e}^{0,154\times\mathrm{e}^{-0,00924\times110}+2,221} \approx 9,7448$ soit au millième près 9,745 s.

   d. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,00924x = -\infty$ et que $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ et enfin $\lim\limits_{X\to-\infty} 0,154\mathrm{e}^X = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = \exp^{2,221}$.

e. On peut donc conclure qu'à long terme le record du monde ne descendra pas en dessous de $\exp^{2,221} \approx 9,2165$, soit 9,217 secondes au millième près.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Première partie

On doit donc avoir $g(0) = 0$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Or g est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et sur intervalle :

$g'(x) = -2x + a - \dfrac{2}{2x+b}$, d'où $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + a - \dfrac{2}{1+b}$.

On a donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0 \\ g'\left(\frac{1}{2}\right) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\ln b & = & 0 \\ -1 + a - \dfrac{2}{1+b} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 1 \\ -1 + a - \dfrac{2}{1+1} & = & 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} b & = & 1 \\ -1 + a - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 1 \\ a & = & 2 \end{array}\right.$$

Conclusion : $g(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$.

Deuxième partie

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

1. On a $f(x) = g(x)$, donc $f'(x) = g'(x) = -2x + 2 - \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{(-2x+2)(2x+1) - 2}{2x+1} =$
$\dfrac{-4x^2 - 2x + 4x + 2 - 2}{2x+1} = \dfrac{2x - 4x^2}{2x+1} = \dfrac{2x(1-2x)}{2x+1}$.

Or sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $2x + 1 > 0$, donc le signe de la dérivée est celui de son numérateur $2x(1-2x)$; ce trinôme du second degré est négatif sauf entre ses racines 0 et $\frac{1}{2}$. On a donc :

- sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $f'(x) < 0$; sur ces deux intervalles la fonction est décroissante ;
- sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$; sur cet intervalle la fonction est croissante.
- $f'(0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; la fonction a deux extremums.

Valeurs aux bornes des intervalles :

On a $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{2}} -x^2 + 2x = -\frac{5}{4}$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \ln(2x+1) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{2}} -\ln(2x+1) = +\infty$ et finalement par somme de limites $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$.

$f(0) = 0 + 0 - 0 = 0$;
$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 1 - \ln(1+1) = \frac{3}{4} - \ln 2 = \frac{3}{4} + \ln\frac{1}{2}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 + 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(2-x) = -\infty$, par produit de limites ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x+1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(2x+1) = -\infty$ et enfin par somme de limites :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** D'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction f continue sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ car dérivable sur cet intervalle est strictement décroissante de $\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,057$ à $\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,057$ à $f(1) = -1 + 2 - \ln 3 \approx -0,098$; d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un réel unique $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne :
$f(0,8) \approx 0,004$ et $f(0,9 \approx -0,04$, donc $0,8 < \alpha < 0,9$;
$f(0,81) \approx 0,0007$ et $f(0,82) \approx -0,003$, donc $0,81 < \alpha < 0,82$.

3.
- sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ \alpha\right[$, $f(x) > 0$;
- sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f(x) < 0$;
- $f(0) = f(\alpha) = 0$.