∽ Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord 27 mai 2011 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$. Réponse **c.**

2. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1 \times (1-0) = 1$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est
$y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 0 = 1(x-0) \iff y = x$. Réponse **a.**
3. Avec $F(x) = -(1+x)\mathrm{e}^{-x}$, on obtient :
$F'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1+x)(-1)\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$. Réponse **b.**

4. D'après la question précédente :
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-(1+x)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = -(1+2)\mathrm{e}^{-2} - \left(-(1+0)\mathrm{e}^{-0}\right) = -3\mathrm{e}^{-2} + 1 \approx 0,59$. Réponse **b.**

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A Étude d'un modèle affine

1. Voir l'annexe
2. La calculatrice permet de trouver : $r = 0,023t - 0,162$ (coefficients au millième près).
3. **a.** 2011 correspond à $t = 111$; le recul sera donc de $r = 0,023 \times 111 - 0,162 = 2,391$.
La longueur du glacier sera alors : $25,6 - 2,391 = 23,209 \approx 23,2$ km.
   b. Le glacier disparaîtra quand $r = 25,6$ km, soit au bout d'une durée t vérifiant :
$25,6 = 0,023t - 0,162 \iff 25,762 = 0,023t \iff t = \dfrac{25,762}{0,023} \approx 1\,120$.
D'après ce modèle le glacier aura disparu en 3020.

Partie B Utilisation d'un modèle exponentiel

1.

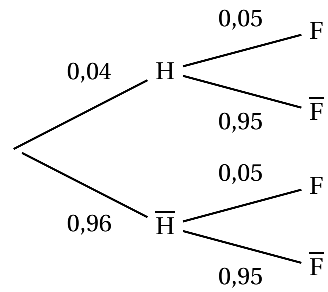
Durée t (à partir de 1900)	20	40	60	80	100
$y = \ln(r)$	1,204	0,511	0	0,470	0,833

2. **a.** La calculatrice livre : $y = 0,025t - 1,599$.
   b. Comme $y = \ln r = 0,025t - 1,599 \iff r = \mathrm{e}^{0,025t-1,599}$.
$r = \mathrm{e}^{0,025t-1,599}$ avec $t \geqslant 0$.
3. **a.** 2011 correspond à $t = 111$, d'où un recul de $\mathrm{e}^{0,025\times 111-1,599} \approx 3,241$.
D'après ce modèle la longueur du glacier en 2011 sera $25,6 - 3,241 = 22,359 \approx 22,4$ km.
   b. Le glacier aura disparu quand $r = 25,6$, soit pour une durée t vérifiant :
$\mathrm{e}^{0,025t-1,599} = 25,6 \iff 0,025t - 1,599 = \ln 25,6 \iff 0,025t = 1,599 + \ln 25,6 \iff$
$t = \dfrac{1,599 + \ln 25,6}{0,025} \approx 193,6 \approx 194$ (ans).
Avec le modèle exponentiel le glacier aura disparu en 2094.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

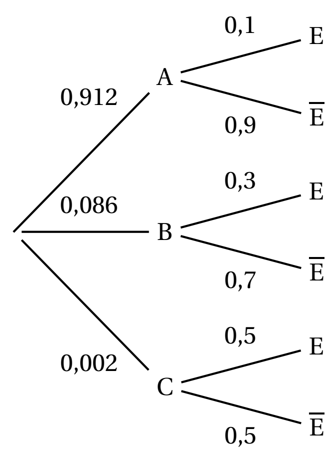
Partie A Étude de l'état d'asthme du couple



On admet que les évènements H et F sont indépendants.

1. Les évènements H et F sont indépendants, donc $p_{\text{H}}(\text{F}) = p(\text{F}) = 0,05$.
2. $p(\text{A}) = p\left(\overline{\text{H}} \cap \overline{\text{F}}\right) = p\left(\overline{\text{H}}\right) \times p\left(\overline{\text{F}}\right) = 0,96 \times 0,95 = 0,912$.
   $p(\text{C}) = p\,(\text{H} \cap \text{F}) = p\,(\text{H}) \times p\,(\text{F}) = 0,04 \times 0,05 = 0,002$.
   Puis $p(\text{C}) = 1 - p(\text{A}) - p(\text{B}) = 1 - 0,912 - 0,002 = 0,086$.

Partie B Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant



1. Voir ci-contre.
2. Loi des probabilités totales :
   $p(\text{E}) = p(\text{A} \cap \text{E}) + p(\text{B} \cap \text{E}) + p(\text{C} \cap \text{E}) =$
   $0,912 \times 0,1 + 0,086 \times 0,3 + 0,002 \times 0,5 =$
   $0,091\,2 + 0,025\,8 + 0,001 = 0,118$.
   La probabilité d'avoir un enfant asthmatique est un peu plus grande que 10 %.
3. On a $P_{\text{E}}(\text{A}) = \dfrac{P(\text{E} \cap P(\text{A})}{P(\text{E})} = \dfrac{0,092}{0,118} \approx 0,773$.
   La probabilité pour un enfant asthmatique d'avoir ses deux parents non asthmatiques est égale à 0,773.
   On en déduit que $P_{\text{E}}\left(\overline{\text{A}}\right) = 1 - P_{\text{E}}(\text{A}) = 1 - 0,773 = 0,227$.
   La probabilité pour un enfant asthmatique d'avoir un de ses parents asthmatiques est égale à 0,227.
4. L'évènement contraire est « un enfant non asthmatique a ses deux parents non asthmatiques » ; sa probabilité est égale à

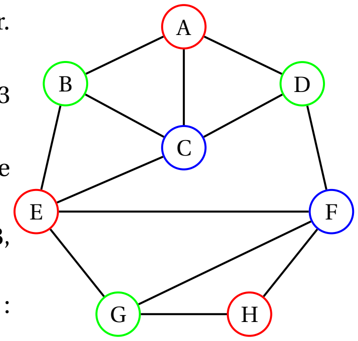
   $$P_{\overline{\text{E}}}\left(\overline{\text{A}}\right) = 1 - P_{\overline{\text{E}}}(\text{A}) = 1 - \frac{P\left(\text{A} \cap \overline{\text{E}}\right)}{P\left(\overline{\text{E}}\right)}.$$

   On a $P\left(\text{A} \cap \overline{\text{E}}\right) = P_{\text{A}}\left(\overline{\text{E}}\right) \times P(\text{A}) = 0,9 \times 0,912 = 0,820\,8$ et
   $P\left(\overline{\text{E}}\right) = 1 - 0,118 = 0,882$, donc
   $P_{\overline{\text{E}}}\left(\overline{\text{A}}\right) = 1 - \dfrac{0,820\,8}{0,882} \approx 0,069$.
   La probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatiques est un peu inférieure à 7 %.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Étude d'un site



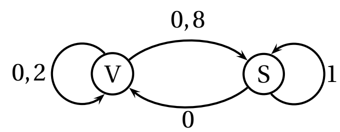
1. Non : il faudrait qu'il y ait 0 ou 2 sommets de degré impair. Il y en a 3.
2. **a.** L'ordre maximal d'un sous-graphe complet est égal à 3 (exemple A-B-C).

   b. C, E et F ont pour degré 4, donc N nombre chromatique est tel que $N \leqslant 5$.

   Un sous-graphe complet d'ordre maximal est d'ordre 3, donc $3 \leqslant N \leqslant 5$.

   Donc une coloration est possible avec trois couleurs : $N = 3$. Voir ci-contre.

Partie B Étude de propagation d'un virus d'un site à l'autre



1. Un site étant sain la probabilité de contaminer le site suivant est nulle :
   $p_S(V) = 0$ et donc $p_S(S) = 1$.
   Voir le graphe complété ci-dessus.
2. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. **a.** $X_{n+1} = X_n M \iff \begin{pmatrix} P_{n+1} & Q_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2P_n & 0,8P_n + Q_n \end{pmatrix}$.

   Donc en particulier $P_{n+1} = 0,2P_n$.

   b. Le résultat précédent montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 0,2, donc quel que soit le naturel n non nul , $P_n = 0,2^{n-1}$.

   c. Comme $0 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 0$.

   Pour n assez grand la probabilité de propager le virus se rapproche de zéro.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Étude du prix P proposé par le fournisseur

1. En écrivant $P(x) = \dfrac{1 + \frac{300}{x}}{1 + \frac{100}{x}}$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{x} = 0 \quad (A >)$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = 1$.
2. P quotient de deux fonctions dérivables sur $[100\ ;\ +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et pour $x \in [100\ ;\ +\infty[$,
   $P'(x) = \dfrac{1(x+100) - 1(x+300)}{(x+100)^2} = \dfrac{-200}{(x+100)^2}$.
3. Comme $(x+100)^2 > 0$ quelque soit $x \geqslant 0$, le signe de $P'(x)$ est celui du numérateur, donc sur $[100\ ;\ +\infty[$, $P'(x) < 0$: la fonction P est décroissante de $P(100) = \dfrac{400}{200} = 2$ à 1.

Partie B Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

1. On a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = 1$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$.
2. En dérivant le produit sur $[100\,;\,+\infty[$:
$S'(x) = P(x) + xP'(x) = \dfrac{x+300}{x+100} + x \times \dfrac{-200}{(x+100)^2} = \dfrac{(x+300)(x+100)-200}{(x+100)^2} =$
$\dfrac{x^2+400x+30\,000-200x}{(x+100)^2} = \dfrac{x^2+200x+30\,000}{(x+100)^2}$.
3. On a $S(x) = \dfrac{x(x+300)}{x+100} = \dfrac{x(x+100+200)}{x+100} = \dfrac{x(x+100)}{x+100} + \dfrac{x \times 200}{x+100} = x + \dfrac{200x}{x+100}$;
Puis $S(x) = x+200-200+\dfrac{200x}{x+100} = x+200+\dfrac{-200x-20\,000+200x}{x+100} = x+200-\dfrac{20\,000}{x+100}$.
4. Sur $[100\,;\,+\infty[$ on trouve aisément une primitive de chacun des trois termes de S, donc une primitive de $S(x)$ est la fonction : $\dfrac{x^2}{2}+200x-20\,000\ln(x+100)$.

Partie C Étude de différentes situations

1. Si $S(x) \leqslant 900$, alors $x\left(\dfrac{x+300}{x+100}\right) \leqslant 900 \iff x(x+300) \leqslant 900(x+100) \iff$
$x^2+300x \leqslant 900x+90\,000 = 0 \iff x^2-600x-90\,000 \leqslant 0$.
Considérons l'équation $x^2-600x-90\,000 = 0$. On a $\Delta = 360\,000+360\,000 = 2\times 360\,000 = \left(600\sqrt{2}\right)^2 > 0$: il y a donc deux racines :
$$\frac{600+600\sqrt{2}}{2} = 300+300\sqrt{2} \quad \text{et} \quad 300-300\sqrt{2}$$
Le trinôme est négatif entre les racines et donc la plus grande valeur pour laquelle on a $x^2-600x-90\,000 \leqslant 0$ est $300+300\sqrt{2} \approx 724,2$.
Le magasin peut commander jusqu'à 724 kg de fruits avec 900 €. (724 fruits coûtent 899,73 €).
2. La valeur moyenne de S sur l'intervalle $[400;600]$ est égale à :
$\dfrac{1}{600-400}\displaystyle\int_{400}^{600} S(x)\,\mathrm{d}x =$ (d'après la partie B)
$\dfrac{1}{200}\left[\dfrac{x^2}{2}+200x-20\,000\ln(x+100)\right]_{400}^{600} = \dfrac{1}{200}\dfrac{600^2}{2}+200\times 600-20\,000\ln(600+100)-$
$\dfrac{1}{200}\left[\dfrac{400^2}{2}+200\times 400-20\,000\ln(400+100)\right] =$
$\dfrac{1}{200}(180\,000+120\,000-80\,000-80\,000-20\,000\ln 700+20\,000\ln 500) =$
$\dfrac{1}{200}\left(140\,000+20\,000\ln\dfrac{500}{700}\right) = 700+100\ln\dfrac{5}{7} \approx 666$ €.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Exercice 2