Durée : 3 heures

Correction du Baccalauréat ES/L Antilles-Guyane 18 juin 2019

Exercice I — 5 points

Commun à tous les candidats

La partie C est indépendante des parties A et B.

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert;
- **Étape 2** :
  - — s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile;
  - — sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

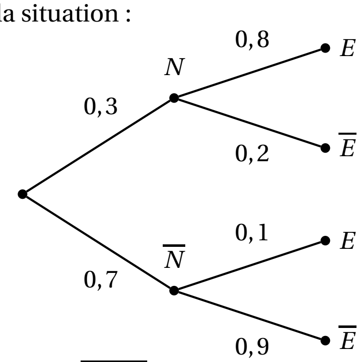
Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note :
N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 »;
E l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1. **a.**
- $P(N) = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = \boxed{0,3}$
- $P_N(E) = \dfrac{8}{10} = \boxed{0,8}$

b. Arbre pondéré modélisant la situation :



2. $P(E \cap N) = P_N(E) \times p(N) = 0,8 \times 0,3 = \boxed{0,24}$. La probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile est 0,24.

3. $P(E) = P_N(E) \times p(N) + P_{\overline{N}}(E) \times P(\overline{N})$ (formule des probabiités totales)
$= 0,24 + 0,1 \times 0,7 = 0,24 + 0,07 = 0,31$; $\boxed{P(E) = 0,31}$.
La probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à 0,31.

4. Le client a gagné un bon d'achat. $P_E(N) = \dfrac{P(E \cap N)}{P(E)} = \dfrac{0,24}{0,31} = \boxed{\dfrac{24}{31}}$. La probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape sachant qu'il a gagné un bon d'achat est $\dfrac{24}{31}$.

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros.
Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 euros par tranche de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel.
On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés.
On admet que X suit une loi binomiale.

1. X suit la loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 100}$ et $\boxed{p = 0,31}$; $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(100\ ;\ 0,31)}$.
2. $P(X = 30) = \binom{100}{30} \times 0,31^{30} \times 0,69^{70} \approx 0,085$ (calculé directement à la calculatrice).
3. Puisque X suit une loi binomiale, son espérance est $E(X) = np = 100 \times 0,31 = 31$.
   En moyenne, par lot de 100 clients, 31 sont gagnant donc gagnent 310 €. Il doit donc prévoir 310 € ; la somme prévue est donc **insuffisante**

Partie C

La direction de l'hypermarché étudie le temps que les clients passent dans son magasin.
On admet que le temps, exprimé en minute, passé dans ce magasin par un client peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 5$.

1. $P(30\ ;\ Y\ ;\ 60) = P(\mu - 3\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 3\sigma) \approx \boxed{0,997}$ (d'après le cours).
2. On sait que $P(Y \geqslant 45) = P(Y \geqslant \mu) = 0,5$ (courbe de Gauss symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$).
   Par conséquent, $P(Y \geqslant 50) = 0,5 - P(45 \leqslant Y \leqslant 50) = 0,5 - P(\mu \leqslant Y \leqslant \mu + \sigma)$
   $= 0,5 - \dfrac{1}{2} \times p(\mu - \sigma \leqslant Y \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,5 - \dfrac{0,682}{2} = 0,5 - 0,341 = \boxed{0,159}$.
   (on peut aussi calculer directement $p(X \geqslant 50)$ à la calculatrice)

Exercice II 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Un infographiste simule sur ordinateur la croissance d'un bambou. Il prend pour modèle un bambou d'une taille initiale de 1 m dont la taille augmente d'un mois sur l'autre de 5 % auxquels s'ajoutent 20 cm.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la taille, exprimée en centimètre, qu'aurait le bambou à la fin du n-ième mois, et $u_0 = 100$.

1. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % est 1,05.

   - $u_1 = 1,05u_0 + 20 = 1,05 \times 100 + 20 = 125$.
   - $u_2 = 1,05 \times u_1 + 20 = 1,05 \times 1,25 + 20 = 151,25$.

   $\boxed{u_1 = 125}$; $\boxed{u_2 = 151,25}$.
2. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % est 1,05 donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = 1,05u_n + 20}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n + 400$.

a. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} + 400 = (1,05u_n + 20) + 400 = 1,05u_n + 420 = 1,05\left(u_n + \dfrac{420}{1,05}\right) = 1,05\,(u_n + 400) = 1,05v_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = 1,05v_n}$.
On en déduit que la suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 1,05$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 400 = 500$.

b. Puisque (v_n) est géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 q^n$ donc $\boxed{v_n = 500 \times 1,05^n}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 400$, donc $u_n = v_n - 400 = \boxed{500 \times 1,05^n - 400}$.

d. À la fin du 7^{e} mois, la taille du bambou est $u_7 \approx 303,55$ cm donc environ 3,03 m.

4. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel n est un entier naturel et u est un nombre réel.

```
u ← 100
n ← 0
Tant que u < 200 faire
    | u ← 1,05 × u + 20
    | n ← n + 1
Fin Tant que
```

a.

Test $u < 200$		vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de u	100	125	131,25	178,81	207,75
Valeur de n	0	1	2	3	4

b. À la fin de l'exécution de l'algorithme, on a $n = 4$.
La taille du bambou dépassera 2 m au bout de 4 mois.

c. Modifions les lignes nécessaires dans l'algorithme pour déterminer le nombre de mois qu'il faudrait à un bambou de 50 cm pour atteindre ou dépasser 10 m.

```
u ← 50
n ← 0
Tant que u < 1000 faire
    | u ← 1,05 × u + 20
    | n ← n + 1
Fin Tant que
```

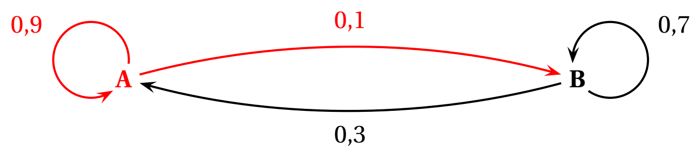
Exercice II — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

La mairie d'une ville propose une carte jeune annuelle donnant droit à des réductions sur les activités culturelles et de loisirs. La mairie espère que dans l'avenir, au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte et si oui, en quelle année cela se produirait.
Ces dernières années, lors du renouvellement de la carte, on a constaté que 10 % des possesseurs de la carte ne la rachètent pas. Dans le même temps, 30 % de la population des 12-18 ans qui ne la possédaient pas l'année précédente achètent la carte. On fait l'hypothèse que l'effectif de la population des 12-18 ans est constant et que l'évolution va rester la même pour les prochaines années.
En 2018, 80 % des jeunes de 12-18 ans ne possédaient pas la carte.
On note, pour tout entier naturel n, a_n la part de la population des 12-18 ans de la ville possédant la carte l'année $2018 + n$, et b_n la part de la population des 12-18 ans ne la possédant pas.

Partie A

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B ; A représente l'état « posséder une carte jeune » et B l'état « ne pas posséder une carte jeune ».



2. La matrice M de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

3. **a.** On a $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} {}_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} M^2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,84 & 0,16 \\ 0,48 & 0,52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,552 & 0,448 \end{pmatrix}$.

On en déduit : $\boxed{a_2 = 0,552}$ et $\boxed{b_2 = 0,448}$.

b. Cela signifie qu'en 2020, 55,2 % des 12-18 ans possèderont la carte.

4. On note a et b les coefficients de la matrice P correspondant à l'état stable de ce graphe.

a. On doit avoir $\begin{cases} P = PM \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ a + b = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 0,9a + 0,3b \\ b = 0,1a + 0,7b \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ 0,1a - 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,1a - 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

b. D'après la deuxième ligne, on a $b = 1 - a$. On remplace dans la première ligne ; on trouve : $0,1a - 0,3(1 - a) = 0 \iff 0,4a = 0,3 \iff 0,4a = 0,3 \iff a = \dfrac{3}{4} = 0,75$ et par conséquent, $b = 0,25$.

À long terme, 75 % des 12-18 ans posséderont la carte, donc la mairie peut espérer qu'à l'avenir au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3$ et que la suite (a_n) est croissante.

1. Recopions puis compléter les pointillés des lignes 3 à 5 de l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche le nombre d'années nécessaires à la mairie pour atteindre son objectif qu'au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

$A \leftarrow 0,2$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A < 0,7$ faire
  A prend la valeur $A = 0.6 * A + 0,3$
  N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant Que

2. La calculatrice donne :

- $a_4 = 0{,}67872 < 7$
- $a_5 = 0{,}707232 > 7$

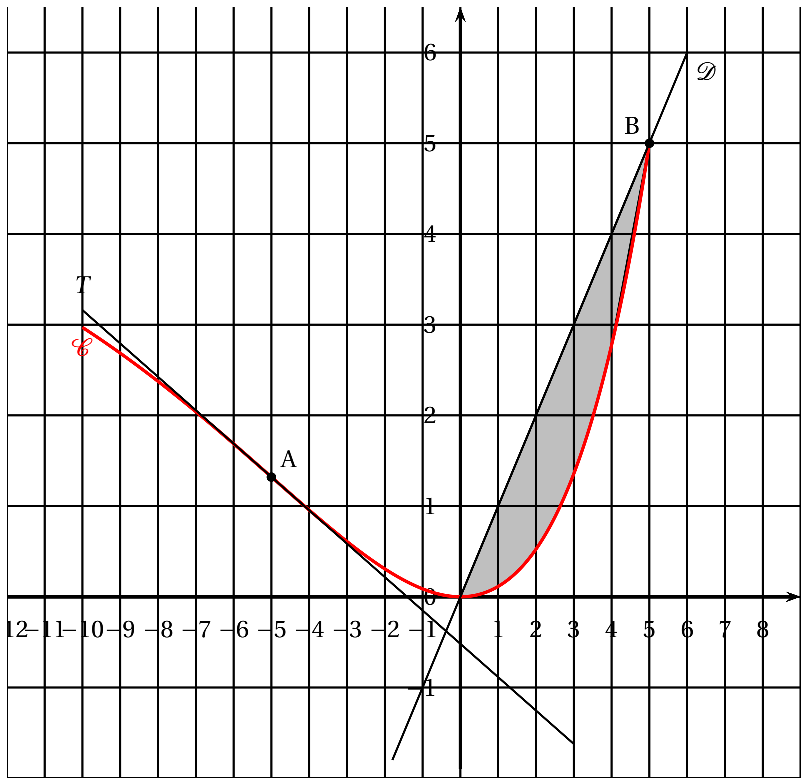
. L'objectif sera atteint en 2023.

Exercice III 7 points

Commun à tous les candidats

Dans la figure ci-dessous sont représentés dans un repère orthogonal :

— la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10 ; 5]$;
— la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5 ;
— la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$;
— le domaine S situé entre la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$, grisé sur la figure.



Partie A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.

Cette partie A est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. La tangente passe approximativement par les point A et C de coordonnées $A(-5 ;\ 1,5)$ et $C(0 ; -0,5)$ donc a pour coefficient directeur environ $-\dfrac{2}{5} = -0,4$; la valeur approchée la plus proche est la réponse a.

   La courbe $\mathscr{C}$ semble en-dessous de ses tangentes sur l'intervalle [-10; -5] et au-dessus sur [-5; 5]. La fonction f semble donc concave sur l'intervalle [-10; -5] et convexe sur l'intervalle [-5; 5]. (réponse d.)

2. L'aire du domaine S, en unité d'aire, appartient à l'intervalle $[4 ; 7]$: (réponse b.)

Partie B

La fonction f précédente, définie et dérivable sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$, a pour expression

$$f(x) = (x-5)\mathrm{e}^{0,2x} + 5.$$

1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$.

a. $f = u\mathrm{e}^{v} + 5$ avec $\begin{cases} u(x) = x-5 \\ v(x) = 0,2x \end{cases}$.

Alors : $f' = (u\mathrm{e}^{v})' = u'\mathrm{e}^{v} + u\left(\mathrm{e}^{v}\right)' = u'\mathrm{e}^{x+u\times v'\mathrm{e}^{v}}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 0,2 \end{cases}$.

On en déduit $f'(x) = \mathrm{e}^{0,2x} + 0,2(x_5)\mathrm{e}^{0,2x} = (1+0,2(x-5))\,\mathrm{e}^{0,2x} = \boxed{0,2x\mathrm{e}^{0,2x}}$.

b. $\mathrm{e}^{0,2x} > 0$ pour tout x donc $f'(x)$ est du signe de x.

Tableau de variation :

x	-10		0		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\approx 2,97$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

c. La valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5 est $f'(-5) = -\mathrm{e}^{-1} = \boxed{-\dfrac{1}{\mathrm{e}}}$.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$g(x) = 0,2x * \exp(0,2x)$ $\to g(x) = \dfrac{1}{5}x\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$
2	Dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{25}x\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$

a. D'après ce qui précède, $f'(x) = g(x)$ donc $f''(x) = g'(x) = \left(\dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} = (0,2+0,04x)\mathrm{e}^{0,2x}$.

b. f est convexe si $f'' > 0$.

$f''(x)$ est du signe de (0,2 + 0,04x), donc positif pour $x \geqslant -\dfrac{0,2}{0,04} = -\dfrac{20}{4} = -5$.

f est convexe sur $[5\ ;\ 5]$.

3. On admet qu'une primitive de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$ est la fonction F définie par

$$F(x) = (5x-50)\mathrm{e}^{0,2x} + 5x.$$

a. $I = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(0) = (-25\mathrm{e}+25) - (-50) = 75 - 25\mathrm{e}$; $\boxed{I = 75 - 25\mathrm{e}}$.

b. L'aire cherchée est celle d'un triangle et vaut : $\mathscr{A} = \dfrac{5\times 5}{2} = \boxed{12,5}$.

c. L'aire du domaine S est $\mathscr{A}(S) = \mathscr{A} - I = 12,5 - (75 - 25\mathrm{e}) = \boxed{25\mathrm{e} - 62,5 \approx 5,46 \text{ u.a.}}$

Exercice IV 3 points

Commun à tous les candidats

Afin de respecter l'accord signé sur la pollution de l'air, certaines entreprises, dès l'année 2014, ont été contraintes de diminuer chaque année la quantité de CO_2 qu'elles produisent.
Une de ces entreprises émettait 15 milliers de tonnes de CO_2 en 2014 et 14,7 milliers de tonnes en 2015.
On suppose que le taux de diminution annuel de CO_2 émis restera constant pendant les années suivantes.

1. Le taux d'évolution de l'émission de CO_2 entre 2014 et 2015 est $t = \dfrac{14,7-15}{15} = -\dfrac{0,3}{15} = -0,02$ $= -2\,\%$.
   $\boxed{t = -2\,\%}$.
2. On note u_n la quantité produite au bout de n années. Chaque année, la quantité est multipliée par $C = 1 + t = 1 - 2\,\% = 0,98$ avec $u_0 = 15$.
   La suite (u_n) est géométrique de raison C donc $u_n = u_0C^n = 15 \times 0,98^n$.
   On cherche n tel que $u_n \leqslant 12$ donc on résout l'inéquation $15 \times 0,98^n \leqslant 12$.
   On en déduit $0,98^n \leqslant \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.
   On applique la fonction logarithme qui est croissante :
   On obtient $\ln(0,98^n) \leqslant \ln 0,8 \iff n\ln(0,98) \leqslant \ln 0,8$.
   Comme $\ln 0,98$ est négatif, on en déduit $n \geqslant \dfrac{\ln 0,8}{\ln, 98} \approx 11,05$ donc il faut $\boxed{n \geqslant 12}$.
   $\boxed{\text{L'objectif sera atteint au bout de 12 ans, en 2026}}$.