# ∽ Corrigé du baccalauréat ES Antilles Guyane ∽
# 16 juin 2017

**EXERCICE 1** **5 POINTS**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples*

*Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.*
*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*
*Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1. On sait que $p(A \cap B) = 0,42$ et $p(B) = 0,5$.
   Donc $p_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,42}{0,5} = 0,84$. **Réponse c.**
2. La variablme $X$ suit une loi continue sur l'intervalle $[\,0\,;\,5\,]$, de longueur 5.
   Donc $p(X > 2) = \dfrac{5-2}{5-0} = \dfrac{3}{5}$ **Réponse b.**
3. Nous savons que $Y$ suit la loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 2$. De plus, d'après le cours : $P(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.
   Or $\mu - 2\sigma = 96$ et $\mu + 2\sigma = 104$ donc $P(96 \leqslant Y \leqslant 104) \approx 0,95$. **Réponse c.**
4. L'intervalle de confiance au seuil des 95 % est : $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
   Son amplitude est donc égale à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Celle-ci est égale à $0,1$. Cela donne donc :
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0,1 \iff \dfrac{4}{n} = 0,01 \iff n = \dfrac{4}{0,01} = 400$ **Réponse d.**
5. Quelque soit la loi normale, $P(\mu - 3\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.
   On s'intéresse en premier à la loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Donc $P(-3 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0,997$.
   Cela permet d'éliminer la réponse C.
   On s'intéresse pour finir à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart-type $\sigma = 2$. La moyenne permet d'éliminer la réponse a.
   De même $P(3 - 3 \times 2 \leqslant Y \leqslant 3 + 3 \times 2) = P(-3 \leqslant Y \leqslant 9) \approx 0,997$. Ce dernier critère permet d'éliminer la réponse b. **Réponse d.**

EXERCICE 2 5 POINTS

**Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L**

1. La piscine perd 4% de son volume, puis on ajoute 2.
   Donc $u_1 = 0,96 \times u_0 + 2 = 0,96 \times 75 + 2 = 74$.
   $u_2 = 0,96 \times u_1 + 2 = 0,96 \times 74 + 2 = 73,04$
2. $u_1 - u_0 = -1$ et $u_2 - u_1 = 0,96$. La différence de deux termes consécutifs n'étant pas constante, la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.
   De même $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

**3.** Pour tout entier naturel $n$, Soit $u_n$ le volume de la piscine au jour $n$, et $u_{n+1}$ son volume au jour $n+1$.
Au jour $n+1$, la piscine aura perdu 4% de son volume. Il restera donc 96% du volume, soit $0,96 \times u_n$. Puis on ajoute $2m^3$, donc $u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2$.

**4.** Pour tout entier naturel $n$ on pose $v_n = u_n - 50$.

**a.** Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 0,96u_n + 2 - 50$
$= 0,96u_n - 48 = 0,96 \times (u_n - \dfrac{48}{0,96}) = 0,96 \times (u_n - 50) = 0,96v_n$.
Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 25$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = v_0 \times q^n = 25 \times 0,96^n$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 50$ donc $u_n = v_n + 50 = 25 \times 0,96^n + 50$.

**d.** Calculons la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini. La suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,96. Comme $q \in ]-1~;~1[$, la limite de la suite $(v_n)$ est nulle lorsque $n$ tend vers l'infini. De plus $u_n = v_n + 50$ donc la limite de la suite $(u_n)$ quand $n$ tend vers l'infini sera égale à 50.

**5. a.** Algorithme complété :

| | | |
|---|---|---|
| L1 | Variables : | $n$ est un nombre entier naturel |
| L2 | | $u$ est un nombre réel |
| L3 | Traitement : | $n$ prend la valeur 0 |
| L4 | | $u$ prend la valeur 75 |
| L5 | | Tant que $U \geqslant 65$ faire |
| L6 | | $u$ prend la valeur $0,96 \times U + 50$ |
| L7 | | $U$ prend la valeur $n+1$ |
| L8 | | Fin Tant que |
| L9 | Sortie : | Afficher $n$ |

**b.** L'algorithme affiche le nombre de jours pendant lesquels le volume d'eau reste suffisant pour que les pompes fonctionnent sans être endommagées.

**c.** $25 \times 0,96^n + 50 \geqslant 65 \iff 25 \times 0,96^n \geqslant 15 \iff 0,96^n \geqslant \dfrac{15}{25} \iff 0,96^n \geqslant \dfrac{3}{5}$

$\iff \ln(0,96^n) \geqslant \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) \iff n \times \ln(0,96) \geqslant \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) \iff n \leqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}{\ln(0,96)}$.

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}{\ln(0,96)} \approx 12,51$, donc $n \leqslant 12$.
Donc le niveau d'eau restera suffisant pendant 12 jours.

EXERCICE 2 5 POINTS

**Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*Les parties* A *et* B *sont indépendantes*

**Partie A**

**1.** Le graphe possède deux sommets de degrés impairs. Il existe donc une chaîne eulérienne qui permet de passer d'une salle à l'autre une et une seule fois.

**2.** Le graphe admettant une chaîne eulérienne et C étant de degré impair le service d'entretien pourra emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux en partant de C. Il arriverait alors au somment F (l'autre sommet de degré impair). Le parcours pourrait être : C–A–B–C–G–E–B–D–F–G–E–F.

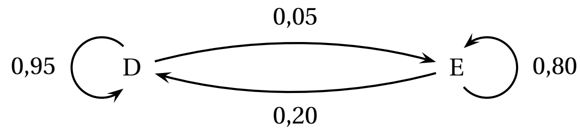
**3.** À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.

| Départ-Sommet | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 75,A | 110,A | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| B(75) | | | ~~110,A~~ 105,B | 125,B | 117,B | $+\infty$ | $+\infty$ |
| C(105) | | | | 125,B | 117,B | $+\infty$ | $+\infty$ |
| E(117) | | | | 125,B | | 157,E | 210,E |
| D(125) | | | | | | 157,E | 210,E |
| F(157) | | | | | | | 210,E |

Le tracé le plus cours entre $A$ et $G$ est donc $A \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow G$. Il a pour longueur 210.

**Partie B**

1. Le graphe probabiliste :




2. La matrice de transition $M$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}$.

3. Le premier jour, 25 % des vacanciers ont déjeuné au centre, donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$.
$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3875 & 0,6125 \end{pmatrix}$. $38,75\%$ des vacanciers vont déjeuné au centre le jour deuxième jour.

4. $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,575 & 0,425 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.
Cet état n'est pas stable.

5. Au bout de $n$ jours, $P_n = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \times M^n$. Lorsque $n$ devient très grand et tend vers l'infini, $P_n$ tend vers l'état stable.
Il s'obtient en résolvant le système : $\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95d + 0,20e & 0,05d + 0,80e \end{pmatrix}$, d'où :
$\left\{ \begin{array}{lcl} d & = & 0,95d + 0,2e \\ e & = & 0,05d + 0,8e \end{array} \right.$
Ces deux équations se simplifient pour obtenir : $0,05d - 0,2e = 0$. De plus $d + e = 1$. Donc le couple $(d\ ;\ e)$ est solution du système : $\left\{ \begin{array}{lcl} 0,05d - 0,2e & = & 0 \\ d + e & = & 1 \end{array} \right.$

Par substitution :
$\left\{ \begin{array}{lcl} 0,05d - 0,2e & = & 0 \\ d + e & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,05d - 0,2(1-d) & = & 0 \\ e & = & 1-d \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,05d - 0,2 + 0,2d & = & 0 \\ e & = & 1-d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,25d & = & 0,2 \\ e & = & 1-d \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} d & = & \dfrac{0,2}{0,25} = \dfrac{4}{5} \\ e & = & 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array} \right.$
L'état stable du système est $P = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$. Donc 80 % des vacanciers vont à terme déjeuné au centre, et non pas 75 % .

EXERCICE 3 7 POINTS

**Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L**

**Partie A**

1. La tangente au point d'abscisse -2 (au point A) est horizontale,
donc $f'(-2) = 0$.

2. $f'(-4) > 0$ car la tangente au point d'abscisse -4 est positive. Cette droite est la représentation graphique d'une fonction affine strictement croissante.

3. On note $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
En comptant les carreaux, on peut affirmer que : $3 \leqslant I \leqslant 4$

**Partie B**

1. **a.** $f'(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} + (x+4) \times -0,5\mathrm{e}^{-0,5x} = \mathrm{e}^{-0,5x}(1 - 0,5(x+4))$
$= (1 - 0,5x - 2)\mathrm{e}^{-0,5x} = (-0,5x - 1)\mathrm{e}^{-0,5x}$

**b.** Pour tout $x \in [\,-4\,;\,10\,]$, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-0,5x - 1$.
$-0,5x - 1 \geqslant 0 \iff -0,5x \geqslant 1 \iff x \leqslant \dfrac{1}{-0,5} \iff x \leqslant -2$

| $x$ | -4 | | $-2$ | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 2e | ↘ | $14\mathrm{e}^{-5}$ |

$f(-4) = 0$ $f(-2) = 2\mathrm{e} \approx 5,437$ $f(10) = 14\mathrm{e}^{-5} \approx 0,094$.

**c.** $f(1) = 5\mathrm{e}^{-0,5} \approx 3,033$ et $f(6) = 10\mathrm{e}^{-3} \approx 0,498$.
Sur l'intervalle $[1\,;\,6]$, la fonction $f$ est continue strictement décroissante. De plus $1,5 \in \left[5\mathrm{e}^{-0,5}\,;\,10\mathrm{e}^{-3}\right]$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution, notée $\alpha$ dans l'intervalle $[1\,;\,6]$.

**d.** Avec la calculatrice on trouve $\alpha \approx 3,11$

2. **a.** Pour tout $x \in [\,-4\,;\,10\,]$, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $0,25x$ donc le même signe que $x$.
Donc si $x \in [-4\,;\,0]$, la fonction $f$ est concave ; si $x \in [0\,;\,10]$ la fonction $f$ est convexe.

**b.** La dérivée seconde s'annule et change de sugne pour $x = 0$. la courbe $\mathscr{C}$ admet donc un point d'inflexion de coordonnées $(0\,;\,4)$.

3. **a.** On calcule $F'(x)$ pour tout $x \in [\,-4\,;\,10\,]$ et on trouve $f(x)$.

**b.** $F(2) = -16\mathrm{e}^{-1}$ et $F(4) = -20\mathrm{e}^{-2}$.
Donc $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = -20\mathrm{e}^{-2} - \left(-16\mathrm{e}^{-1}\right)$
$= 16\mathrm{e}^{-1} - 20\mathrm{e}^{-2} \approx 3,18$

## EXERCICE 4 — 3 POINTS

**Commun à tous les candidats**

1. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure se calcule avec l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Cette aire est inférieure à l'aire du rectangle ayant pour dimensions 1 par 5. Donc $I < 5$.
Si $a = 3$, cette aire devrait être égale à 6, ce qui est donc impossible.

**2.** Calculons $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Une primitive sur l'intervalle $[0~;~1]$ de la fonction définie par $f(x) = 4 + \mathrm{e}^{-5x}$ est $F(x) = 4x + \dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{-5} = 4x - \dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{5}$.

$F(0) = -\dfrac{1}{5}$ et $F(1) = 4 - \dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{5}$.

Donc $I = F(1) - F(0) = 4 - \dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{5} - \left(-\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{21 - \mathrm{e}^{-5}}{5}$.

Pour finir on partage cette aire en deux parties égales, soit $a = \dfrac{21 - \mathrm{e}^{-5}}{10} \approx 2,1$