Corrigé du baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. 35 % ont un enfant, donc 65 % n'en n'ont pas : la probabilité est donc égale à $p\left(\overline{E}\right) = 0,65$.
2. $p_{\overline{E}}(C) = 0,4$.
3. $\overline{E} \cap C$ est l'évènement : « ne pas avoir d'enfant et prendre un panier de 5 kg ».
   On a $p\left(\overline{E} \cap C\right) = p\left(\overline{E}\right) \times p_{\overline{E}}(C) = 0,65 \times 0,4 = 0,26$.
4. **a.** On a donc $p(C) = 0,3 = p(C \cap E) + p\left(C \cap \overline{E}\right) \iff p(C \cap E) = 0,3 - p\left(C \cap \overline{E}\right) = 0,3 - 0,26 = p(C) = 0,04$.

   b. On a $p_E(C) = \dfrac{p(E \cap C)}{p(E)} = \dfrac{0,04}{0,35} = \dfrac{4}{35} \approx 0,114$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. **a.** On lit $f(1) = -1$ et la tangente au poInt d'abscisse 1 est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

   b. L'axe (Oy) est asymptote verticale, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$;
   L'axe (Ox) est asymptote horizontale, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   c. $f(x) \geqslant 0 \iff 0 < x \leqslant \dfrac{1}{\text{e}}$: les solutions sont les réels de l'intervalle $\left]0 ;\ \dfrac{1}{\text{e}}\right]$.
   $f'(x) \geqslant 0 \iff f$ est croissante $\iff x \geqslant 1$: les solutions sont les réels de l'intervalle $[1 ;\ +\infty[$.
2. **a.** f est dérivable sur I et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{b \times \frac{1}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

   b. $\left\{\begin{array}{rcl} f(1) & = & -1 \\ f'(1) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b - a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & -1 \end{array}\right.$
   Conclusion : sur I, $f(x) = -\dfrac{1 + \ln x}{x}$.

   c. • Sur I, $f(x) \geqslant 0 \iff -\dfrac{1 + \ln x}{x} \geqslant 0 \iff -(1 + \ln x) \geqslant 0 \iff 1 + \ln x \leqslant 0 \iff \ln x \leqslant -1 \iff x \leqslant \text{e}^{-1} \iff x < \dfrac{1}{\text{e}}$: on retrouve bien l'intervalle $\left]0 ;\ \dfrac{1}{\text{e}}\right]$.
   • Sur I, $f'(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{\ln x}{x^2} \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant \ln 1 \iff x \geqslant 1$: on retrouve bien l'intervalle $[1 ;\ +\infty[$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $P_0 = 75\,000$.
   L'année suivante l'accroissement est de 14 pour mille soit $14 \times 75\,000 = 1\,050\,000$ personnes soit 1 050 milliers, plus un solde entrants/sortants de 7 000 personnes soit 7 milliers.

On a donc $P_1 = 75\,000 + 1\,050 + 7 = 76\,057$.
De même $P_2 = P_1 \times 1,014 + 7 = 77\,128,8$ et $P_3 = P_2 \times 1,014 + 7 = 78\,215,6$.
On voit tout de suite que la suite n'est pas arithmétique car $P_2 - P_1 \neq P_1 - P_0$ et qu'elle n'est pas non plus géométrique car $\dfrac{P_2}{P_1} \neq \dfrac{P_1}{P_0}$.

2. Augmenter d'une année sur l'autre de 14 pour mille ou de de 1,4 pour cent c'est multiplier par 1,014 et chaque année le solde entrants/sortants est de + 7, donc $P_{n+1} = 1,014P_n + 7$.

3. On a $U_{n+1} = P_{n+1}+500 = 1,014P_n+7+500 = 1,014P_n+507 = 1,014\left(P_n + \frac{507}{1,014}\right) = 1,014\,(P_n + 500) = U_{n+1} = 1,014U_n$.
L'égalité $U_{n+1} = 1,014U_n$ montre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 1,014.
Son premier terme est $U_0 = P_0 + 500 = 75\,000 + 500 = 75\,500$.

4. On sait que pour tout naturel n, $U_n = U_0 \times 1,014^n = 75\,500 \times 1,014^n$.
Or $U_n = P_n + 500 \iff P_n = U_n - 500 = 75\,500 \times 1,014^n - 500$.

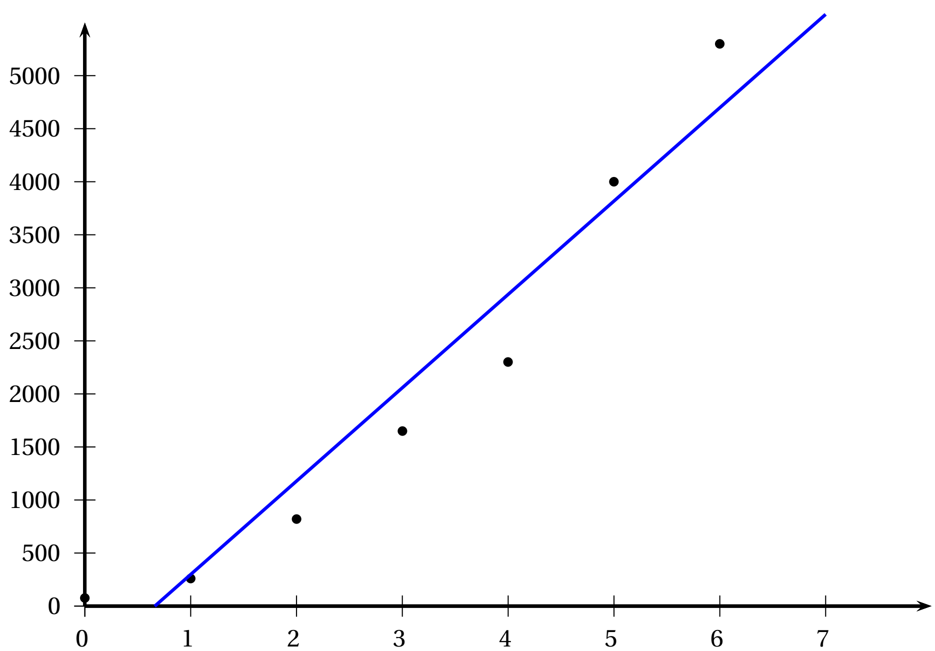
5. **a.** 2010 correspond au rang $n = 5$, ce qui donne $U_5 = 75\,500 \times 1,014^5 - 500 = 80\,435,1$ milliers de personnes, soit environ 80 435 000 habitants.

b. Il faut trouver le plus petit naturel n vérifiant :
$75\,500 \times 1,014^n - 500 \geqslant 2 \times 75\,000 \iff 75\,500 \times 1,014^n \geqslant 150\,500 \iff 1,014^n \geqslant \frac{155\,000}{75500} \iff n\ln 1,014 \geqslant \ln\left(\frac{155\,000}{75500}\right) \iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{155\,000}{75500}\right)}{\ln 1,014}$.
Or $\frac{\ln\left(\frac{155\,000}{75500}\right)}{\ln 1,014} \approx 49,6$.
Il faudra attendre d'après cette prévision 50 ans, soit en 2055.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. De 2001 à 2002, l'augmentation relative est égale à $\dfrac{2\,300 - 1\,650}{1\,650} = 0,393\,9$ soit environ 39,4 %.

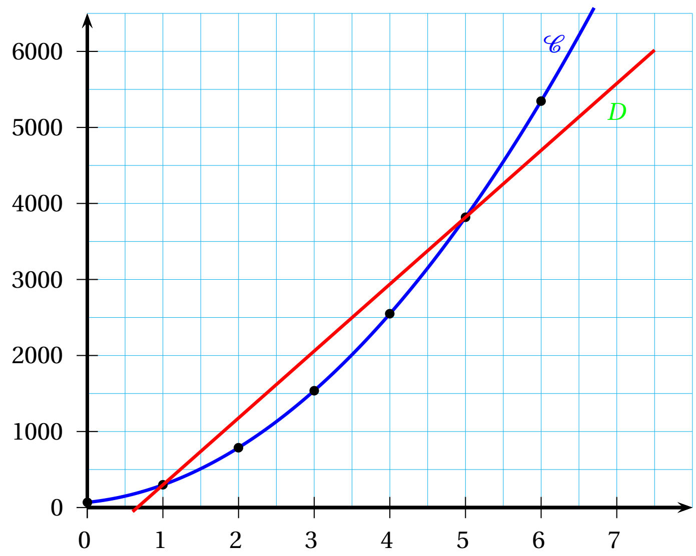
2.



3. La calculatrice donne après arrondis à l'unité $y = 880x - 582$.
Voir ci-dessus

4. On propose un deuxième ajustement de cette série statistique par la fonction f définie, pour tout réel positif x, par : $f(x) = 130x^2 + 100x + 68$.
Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	68	298	788	1 538	2 548	3 818	5 348



5. 2005 correspond au rang $x = 7$.
Avec l'estimation affine on obtient $y = 880 \times 7 - 582 = 6\,160 - 582 = 5\,578$.
Avec l'estimation par la parabole, on obtient $y = 130 \times 7^2 + 130 \times 7 + 68 = 7\,348$: c'est donc l'ajustement par la fonction f qui est la meilleure.

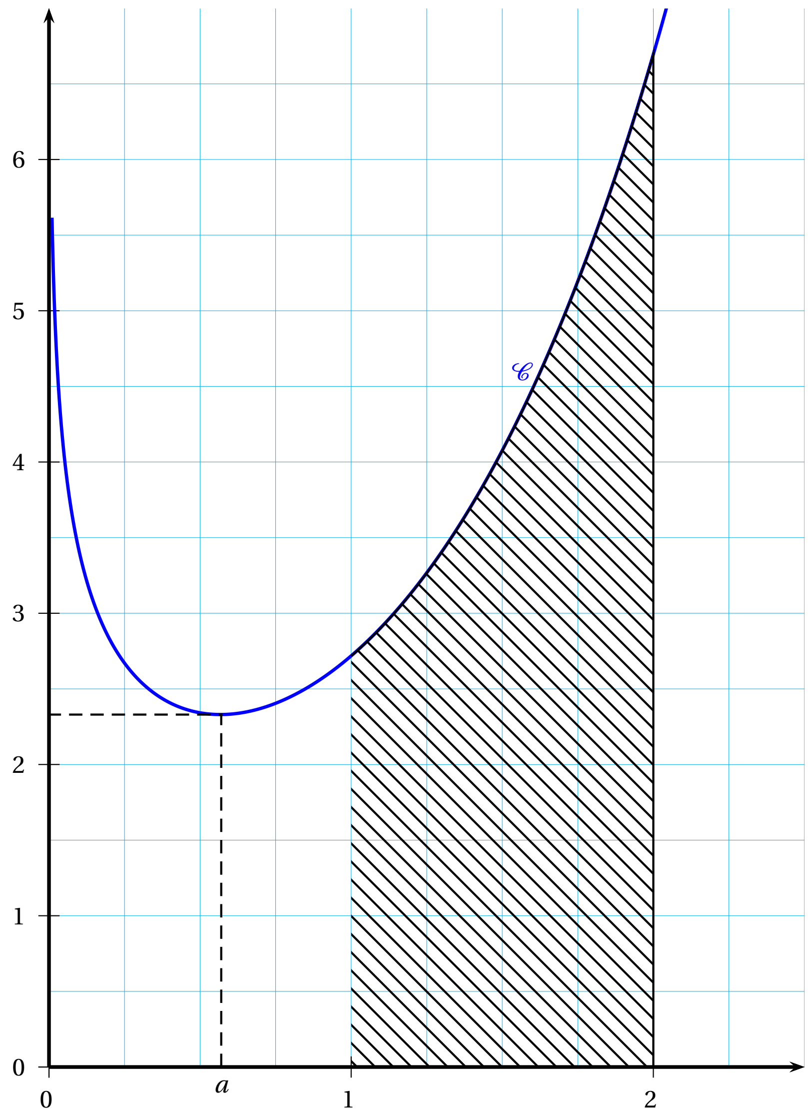
Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. Le tableau de variations montre que sur $]-\infty\,;\, a[$, $f(x) < 0$;
Sur $]a\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$ et enfin $f(a) = 0$.

2. a. On a $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} = +\infty$.
Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la représentation graphique de f au voisinage de zéro.

b. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

c. On a vu le signe de $g(x)$ qui est le même que celui de $f'(x)$ car $x > 0$, d'où :
- sur $]a\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $]a\,;\,+\infty[$;
- sur $]0\,;\,a[$, $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $]0\,;\,a[$;
- $f'(a) = 0$. $f(a) = \mathrm{e}^a - \ln a$ est le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.



3.

4. a. Voir la figure ci-dessus.

b. La fonction H est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$H'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$: la fonction H est donc une primitive de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln x$.

c. Du résultat précédent on déduit qu'une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction f est la fonction F définie sur cet intervalle par :

$F(x) = \mathrm{e}^x - (x\ln x - x) = \mathrm{e}^x - x\ln x + x$.

d. Des variations de f on a vu que sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, $f(x) > 0$, donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale en unité d'aire à l'intégrale :

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = \mathrm{e}^2 - 2\ln 2 + 2 - \left(\mathrm{e}^1 - 1\ln 1 + 1\right) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 2\ln 2 + 1$ (u. a.).

D'après l'énoncé l'unité d'aire vaut $4 \times 2 = 8$ cm^2, donc l'aire en cm^2 est égale à :

$8\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 2\ln 2 + 1\right) \approx 34,28 \approx 34,3$ cm^2. (ce que l'on peut vérifier approximativement en comptant les carreaux de 1 cm^2)