Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $F'(x) = \dfrac{2}{2x+4} = \dfrac{1}{x+2}$.

2. Une primitive de $x \longmapsto 2x\mathrm{e}^{x^2}$ est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$, donc $\displaystyle\int_0^1 3x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 =$
$\frac{3}{2}\mathrm{e}^{1^2} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{0^2} = \frac{3}{2}(\mathrm{e}-1)$.

3. On a $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1+x}{x^2}$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y - 2 = -\dfrac{2}{1}(x-1) \iff y = 2 - 2x + 2 \iff y = -2x+4$.
Pour $x = 2$, on a $y = 0$. Elle passe par le point $(2\,;\,0)$.

4. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x} = \dfrac{1}{2}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = -\ln 2$.
Ceci signifie qu'au voisinage de plus l'infini la droite dont une équation est $y = 2x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

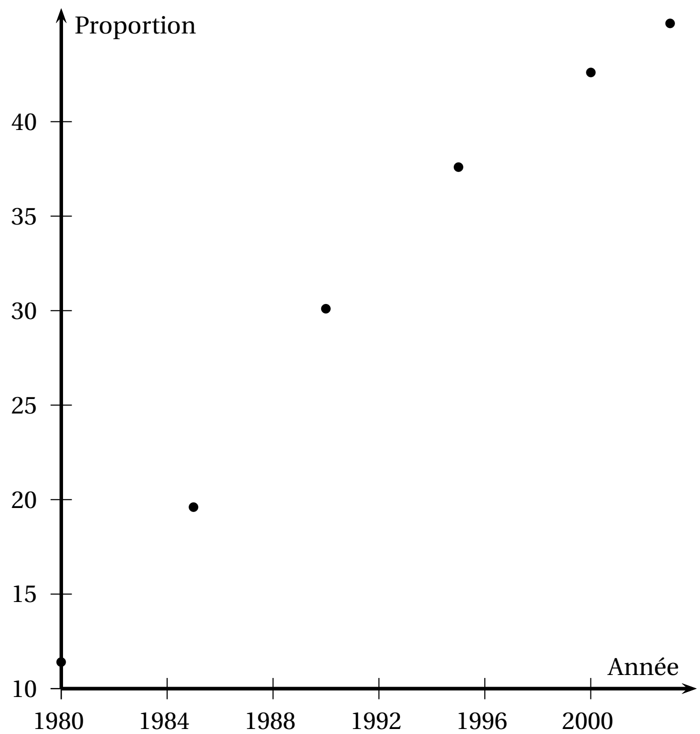
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Voir plus bas
   b. Les points sont pratiquement alignés : un ajustement affine semble adapté.
2. **a.** Compléter sur la feuille annexe le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30	35	40	45	50	53
$t_i = \ln x_i$	3,401	3,555	3,689	3,807	3,912	3,970
y_i	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

   b. Après arrondi au dixième des coefficients trouvés grâce à la calculatrice on obtient
   $y = 61,3t - 197$.
   c. On a $x > 0$, donc comme $t = \ln x$, on a $y = 61,3\ln t - 197$.
   d. 2010 correspond au rang $x = 60$, d'où une estimation $y = 61,3\ln 60 - 197 \approx 53,983$ soit à l'unité près une proportion du nombre d'enfants nés hors mariage de 54 %.
   e. Il faut trouver le plus petit entier vérifiant :
   $61,3\ln n - 197 \geqslant 60 \iff 61,3\ln n \geqslant 257 \iff \ln n \geqslant \frac{257}{61,3} \iff n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{257}{61,3}}$.
   Or $\mathrm{e}^{\frac{257}{61,3}} \approx 66,2$. Il faut donc prendre $n = 67$ soit en 2017.



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

1. Il faut 4 arêtes de longueur x, 4 de longueur y et 4 de longueur 5, soit un coût de $(4x+4y+4\times 5)\times 0,8 = 80 \iff 4x+4y+20 = 100 \iff 4x+4y = 80 \iff x+y = 20$.
2. **a.** Le volume est donc égal à $x \times y \times 5 = 5xy$ (dm^3.

   b. La contrainte peut s'écrire $y = 20 - x$, donc $V = 5x(20-x)$.
3. **a.** On a donc $f(x) = 100x - 5x^2$, trinôme du second degré fonction qui a son maximum pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ avec $a = -5$ et $b = 100$.

   Le maximum est donc atteint en $x = -\dfrac{100}{2\times(-5)} = 10$.

   b. Ce maximum est égal à $f(10) = 100\times 10 - 5\times 10^2 = 1\,000 - 500 = 500$ dm^3.
   Les dimensions du bâti sont donc 10, 10 et hauteur 5 en dm.

PARTIE B :

1. Si $x = 12$, alors $z = 12y + 10(12+y) = 12y + 120 + 10y = 22y + 120$ qui est l'équation d'un plan parallèle à l'axe des abscisses.
   L'intersection des deux plans ensemble des points donc les coordonnées vérifient
   $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12\\ z &=& 22y+120\end{array}\right.$ est une droite.
2. La surface vitrée de l'aquarium se compose du :
   – du fond rectangulaire de côtés x et y, donc d'aire xy ;
   – de deux parois rectangulaires de côtés x et 5, donc d'aire $2\times 5\times x = 10x$;

– de deux parois rectangulaires de côtés y et 5, donc d'aire $2 \times 5 \times y = 10y$
La surface vitrée totale est égale à $xy + 10x + 10y = g(x\,;\,y)$.

3. a. On a d'une part $x = 12$ et d'autre part $y = 20 - x = 20 - 12 = 8$, donc
$g(12\,;\,8) = 12 \times 8 + 10 \times (12 + 8) = 96 + 200 = 296\ \text{dm}^2$.

b. On lit à peu près $13 \leqslant y \leqslant 17$, donc $y \in \{13\,;\,14\,;\,15\,;\,16\,;\,17\}$.

c. Avec $x = 12$, l'aire est égale à $g(12\,;\,y) = 22y + 120$.
Donc $400 \leqslant 22y + 120 \leqslant 500 \iff 280 \leqslant 22y \leqslant 380 \iff \frac{280}{22} \leqslant y \leqslant \frac{380}{22} \iff \frac{140}{11} \leqslant y \leqslant \frac{190}{11}$.
Or $\frac{140}{11} \approx 12,7$ et $\frac{190}{11} \approx 17,3$.
Les valeurs entières vérifiant l'encadrement sont donc 13; 14; 15; 16 et 17

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

- $f(2) = \text{e}^{-\frac{1}{2}\times 2+1} = \text{e}^0 = 1$;
- $f'(x) = -\frac{1}{2}\text{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$, donc $f'(2) = -\frac{1}{2}\text{e}^0 = -\frac{1}{2}$.

L'équation de la tangente est donc :
$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \iff y = 1 - \frac{1}{2}x + 1$ soit finalement :
$y = -\frac{1}{2}x + 2$.

2. a. La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{2} = -\frac{1}{2}\text{e}^{-\frac{1}{2}x+1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left[1 - \text{e}^{-\frac{1}{2}x+1}\right]$. Le signe de $g'(x)$ est celui de la différence $1 - \text{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$.
On a $1 - \text{e}^{-\frac{1}{2}x+1} > 0 \iff 1 > \text{e}^{-\frac{1}{2}x+1} \iff 0 > -\frac{1}{2}x + 1 \iff \frac{1}{2}x > 1 \iff x > 2$.
On trouve de même que $1 - \text{e}^{-\frac{1}{2}x+1} > 0 \iff x < 2$. Et $g'(2) = 0$.
La fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$ et croissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

b. On a $g(2) = f(2) + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$: donc le minimum de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ est 0; on a donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.
Or $g(x) \geqslant 0 \iff f(x) + \dfrac{1}{2}x - 2 \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}x + 2$: géométriquement ce résultat signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de sa tangente T au point d'abscisse 2.

3. a.

b. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à la différence de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droite d'équation $x = 0$ $x = 2$ et de l'aire du trapèze dont les sommets sont les points de coordonnées $(0;0)$, $(2;0)$, $(2;1)$ et$(0;2)$.
La première est en unités d'aire égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x$.
Or une primitive de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$ est la fonction $x \longmapsto -2\text{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$, donc
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x = \left[-2\text{e}^{-\frac{1}{2}x+1}\right]_0^2 = -2\text{e}^{-\frac{1}{2}\times 2+1} - \left(-2\text{e}^{-\frac{1}{2}\times 0+1}\right) = -2 + 2\text{e} = 2(\text{e}-1) \approx 3,437$.
D'autre part l'aire du trapèze est égale à $\dfrac{1+2}{2} \times 2 = 3$.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est donc égale à $-2 + 2\text{e} - 2 = 2\text{e} - 5 \approx 0,44$ unité d'aire.
L'unité d'aire valant $2 \times 2 = 4\ \text{cm}^2$, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est approximativement $1,75\ \text{cm}^2$.

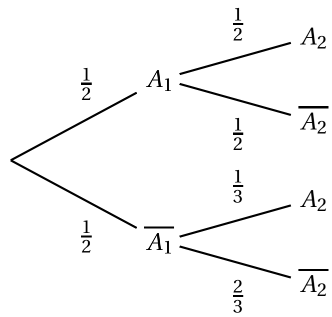
EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** La probabilité est égale à $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

   b. La probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu est donc $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

2. **a.**



   b. On a $P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)=P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

   c. La probabilité que l'automobiliste s'arrête aux deux feux est
   $P\left(A_1\cap A_2\right)=P\left(A_1\right)\times P_{A_1}\left(A_2\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.
   La probabilité que l'automobiliste s'arrête au second feu mais pas au premier est $P\left(\overline{A_1}\cap A_2\right)=$
   $P\left(\overline{A_1}\right)\times P_{\overline{A_1}}\left(A_2\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $P\left(A_2\right)=P\left(A_1\cap A_2\right)+P\left(\overline{A_1}\cap A_2\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3+2}{12}=\dfrac{5}{12}$.

   d. On a $P_{A_2}\left(A_1\right)=\dfrac{P\left(A_2\cap A_1\right)}{P\left(A_2\right)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{3}{5}=0,6$.

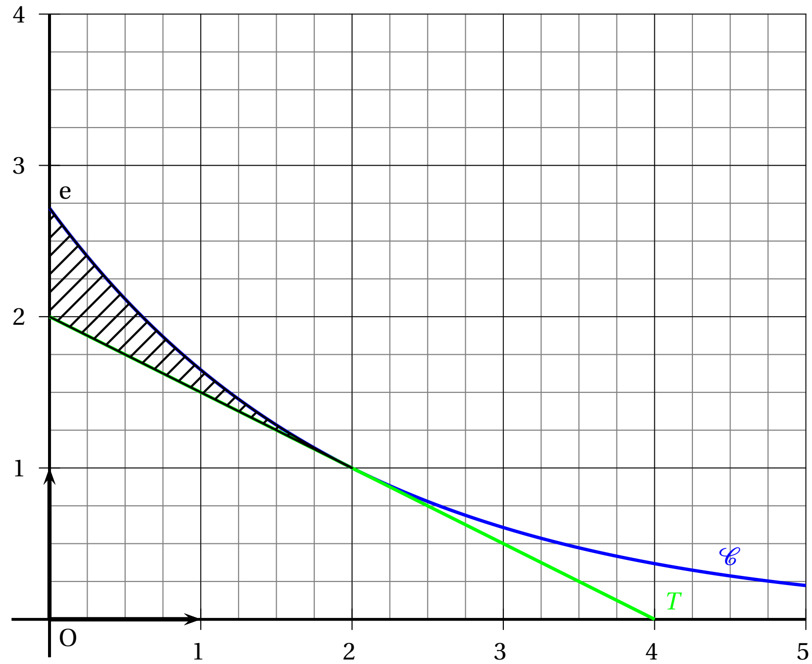
3. **a.** Soit D la variable aléatoire durée du trajet ; le tableau de sa loi de probabilité est le suivant :

D	9	12	15
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

   b. On a $\text{E}(D)=9\times\frac{1}{3}+12\times\frac{5}{12}+15\times\frac{1}{4}=3+5+\dfrac{15}{4}=\dfrac{32+15}{4}=\dfrac{47}{4}$ min soit 11 min 45 s.

Annexes à rendre avec la copie

Exercice 3



Annexe à rendre avec la copie

Enseignement de spécialité