

Durée : 3 heures

∞ Corrigé du baccalauréat Terminale ES Antilles-Guyane ∞
7 septembre 2017

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier l'affirmation choisie.

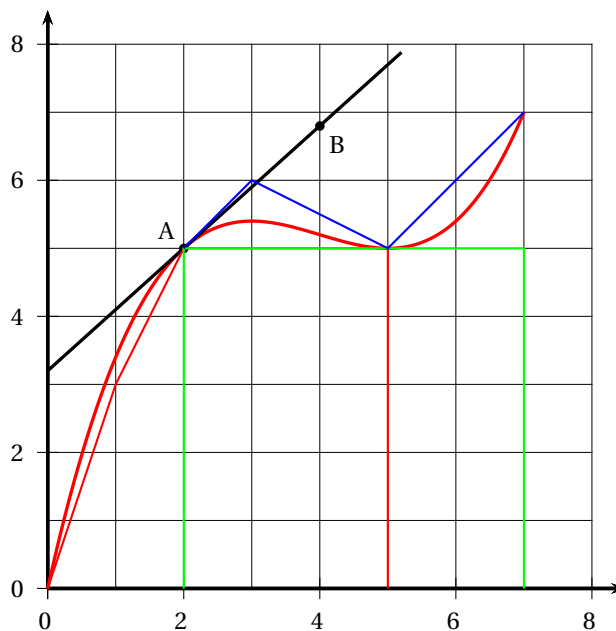
1. **Affirmation 4** : la probabilité que le candidat A obtienne entre 44,91 % et 51,09 % des votes est d'environ 0,95.

La fréquence des électeurs de A est égale à $f = \frac{504}{1050} = 0,48$.

On a $n = 1050 \geq 30$, $nf = 1050 \times 0,48 = 504 \geq 5$ et $n(1-f) = 1050 \times 0,52 = 546 \geq 5$.

On peut dire que l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,48 - \frac{1}{\sqrt{1050}} ; f + \frac{1}{\sqrt{1050}} \right] \approx [0,449139 ; 510861].$$



2.

- a. La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A admet pour équation :

Affirmation 3 : $y = 0,9x + 3,2$

En effet le coefficient directeur de cette tangente est celui de la droite (AB) soit $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$

$$\frac{6,8 - 5}{4 - 2} = \frac{1,8}{2} = 0,9.$$

Une équation de la tangente est donc :

$$y - y_A = 0,9(x - x_A), \text{ soit } y - 5 = 0,9(x - 2) = 0,9x - 1,8, \text{ soit finalement : } y = 0,9x + 3,2.$$

- b. **Affirmation 4** : $25 \leq \int_2^7 f(x) dx \leq 31$

En effet l'intégrale sur l'intervalle $[0; 5]$ vaut d'après le dessin (en rouge) plus de 19,5.

Sur l'intervalle $[2; 7]$, l'intégrale égale en unité d'aire à l'aire de la surface limitée par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = 2$ et $x = 7$ est supérieure à 25 (en vert) et inférieure à 28,5 (en bleu).

3. a. En effet S prend les valeurs : 20,5 31,525 43,101 3 donc dépassera 50 pour $N = 4$.
 b. **Affirmation 2** : l'algorithme 2 affiche en sortie une valeur comprise entre 55 et 56.
 Pour $K = 4$, on obtient $S \approx 55,25$.

EXERCICE 2**5 points****Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L**

1. a. Si 20 % des vélos sont devenus inutilisables une année, il en reste $1 - \frac{20}{100} = \frac{80}{100} = 0,8$.
 Chaque année on multiplie le nombre de vélos de l'année précédente par 0,8 et on ajoute les 30 vélos rachetés.
 b. On a donc $u_1 = 0,8u_0 + 30 = 200 \times 0,8 + 30 = 160 + 30 = 190$.
 Il y aura le 1^{er} janvier 2018, 190 vélos disponibles.
2. a. On a pour tout naturel n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0,8u_n + 30 - 150 = 0,8u_n - 120 = 0,8\left(u_n - \frac{120}{0,8}\right) = 0,8(u_n - 150) = 0,8v_n$; cette dernière égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8, de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = 200 - 150 = 50$.
 b. On sait qu'alors quelque soit le naturel n , $v_n = v_0 \times 0,8^n = 50 \times 0,8^n$.
 c. Pour tout naturel n , $v_n = u_n - 150 \iff u_n = v_n + 150$, soit $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.
 d. Il faut donc résoudre l'inéquation : $u_n \leq 160$, soit $50 \times 0,8^n + 150 \leq 160 \iff 50 \times 0,8^n \leq 10 \iff 0,8^n \leq \frac{1}{5} \iff n \ln 0,8 \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \iff n \geq \frac{\ln \frac{1}{5}}{\ln 0,8}$.
 Or $\frac{\ln \frac{1}{5}}{\ln 0,8} \approx 7,2$.
 Le nombre de vélos sera inférieur à 160 en $2015 + 8 = 2023$. La location s'arrêtera.
3. a. La somme des subventions pour les deux premières années est égale à : $20 \times (u_0 + u_1) = 20 \times (200 + 190) = 20 \times 390 = 7800$ euros.
 b. Calculons grâce à la formule $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$, le nombre de vélos disponibles chaque année en arrondissant ce nombre à l'entier le plus proche :

Année	Nombre de vélos	Subvention annuelle
2017	200	4 000
2018	190	3 800
2019	182	3 640
2020	176	3 520
2021	170	3 400
2022	166	3 320
2023	163	3 260
2024	160	3 200
2025	158	3 160
Totaux	1 560	31 300

Le total des subventions de la région sera de 31 300 euros.

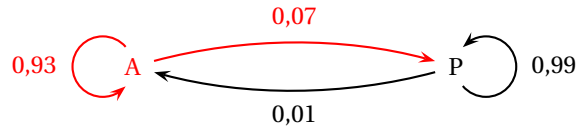
EXERCICE 2

5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On représente cette situation par un graphe probabiliste :



2. D'après le texte on a :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,93 a_n + 0,01 p_n \\ b_{n+1} = 0,07 a_n + 0,99 b_n \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :
$$(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition de ce graphe est donc
$$T = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$$

3.
$$R_1 = R_0 \times T = (0,05 \quad 0,95) \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix} = (0,05 \times 0,93 + 0,95 \times 0,01 \quad 0,05 \times 0,07 + 0,95 \times 0,99)$$

$$= (0,056 \quad 0,944)$$

4. 2021 = 2017 + 4 donc l'état probabiliste en 2021 est R_4 ; on calcule successivement R_2, R_3 et R_4 à la calculatrice en arrondissant au millième :

Année	2017	2018	2019	2020	2021
n	0	1	2	3	4
R_n	(0,05 0,95)	(0,056 0,944)	(0,062 0,938)	(0,067 0,933)	(0,071 0,929)

Donc l'état probabiliste en 2021 est $(0,071 \quad 0,929)$.

5. On admet qu'il existe un état stable $(x \quad y)$.

a. D'après le texte, on a pour tout $n, a_n + p_n = 1$; donc l'état stable $(x \quad y)$ vérifie $x + y = 1$.

De plus l'état stable vérifie

$$\begin{aligned} (x \quad y) &= (x \quad y) \times T \iff (x \quad y) = (x \quad y) \times \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix} \\ &\iff (x \quad y) = (0,93x + 0,01y \quad 0,07x + 0,99y) \\ &\iff \begin{cases} x = 0,93x + 0,01y \\ y = 0,07x + 0,99y \end{cases} \iff \begin{cases} -0,07x + 0,01y = 0 \\ -0,07x + 0,01y = 0 \end{cases} \\ &\iff -7x + y = 0 \end{aligned}$$

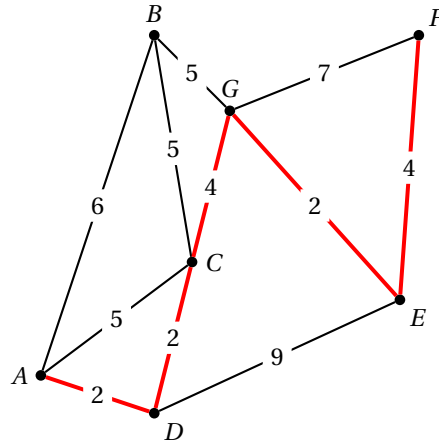
Donc x et y sont solutions du système
$$\begin{cases} -7x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} -7x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 8x = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0,125 \\ y = 0,875 \end{cases}$$

L'état stable du système est
$$\begin{cases} x = 0,125 \\ y = 0,875 \end{cases}$$

Partie B

Le responsable du service de location souhaite vérifier l'état des pistes cyclables reliant les parkings à vélos de location disposés dans la ville. On modélise la disposition des lieux par le graphe étiqueté ci-contre dont les sommets représentent les parkings à vélo. Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, pour se rendre d'un parking à l'autre en suivant la piste cyclable.



1. Cherchons les degrés de chacun des sommets du graphe :

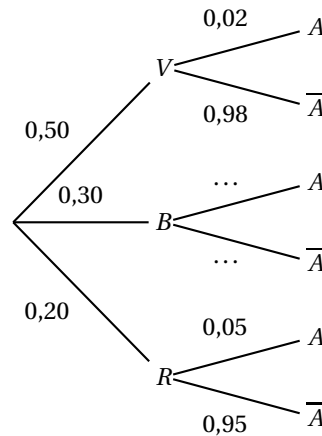
Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	3	4	3	3	2	4

Il y a plus de deux sommets de degrés impairs donc, d'après le théorème d'Euler, il ne peut pas y avoir de parcours partant de A pour arriver en F en passant une seule fois par chaque piste cyclable.

2. Le parcours le plus rapide possible permettant d'aller de A à F est obtenu par l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	6 A	5 A	2 A	∞	∞	∞	D
	6 A	5 A 4 D		11 D	∞	∞	C
	6 A 11 G			11 D	∞	8 C	B
				11 D	∞	8 C 11 B	G
				11 D 10 G	15 G		E
					15 G 14 E		F

Le parcours le plus rapide pour aller de A à F est : $A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} G \xrightarrow{2} E \xrightarrow{4} F$
 Il dure 14 minutes.

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats****Partie A****1.**

$$2. p(V \cap A) = p(V) \times p_V(A) = 0,50 \times 0,02 = 0,01.$$

Il y a 1 % de chance de choisir un coureur du parcours vert ayant abandonné.

$$3. \text{ Il faut calculer } p_A(V) = \frac{p(A \cap V)}{p(A)} = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125.$$

4. D'après la loi des probabilités totales, on a :

$$p(A) = p(A \cap V) + p(A \cap B) + p(A \cap R). \quad (1)$$

$$\text{Or } p(A \cap R) = p(R) \times p_R(A) = 0,2 \times 0,05 = 0,01.$$

$$(1) \text{ devient } 0,032 = 0,01 + p(A \cap B) + 0,01 \text{ soit } p(A \cap B) = 0,032 - 0,01 - 0,01 = 0,012.$$

$$5. \text{ On sait que } p(B \cap A) = p(B) \times p_B(A) \text{ soit } 0,012 = 0,3 \times p_B(A), \text{ soit } p_B(A) = \frac{0,012}{0,3} = 0,04.$$

Donc parmi les coureurs du parcours bleu, il y a 4 % d'abandons.

Partie B

1. Le premier graphique ne peut représenter la fonction de densité : d'après celui-ci on aurait $p(\sigma - 2\mu \leq X \leq \sigma + 2\mu) = 1$ ce qui n'est pas possible.

2. a. On sait que $p(\sigma - \mu \leq X \leq \sigma + \mu) = p(5 \leq X \leq 7) \approx 0,95$.

b. On sait que $p(X \leq 4) = p(X \leq 6) - p(4 \leq X \leq 6) = 0,5 - p(4 \leq X \leq 6) \approx 0,159$. (calculatrice)

EXERCICE 4**5 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

$$f(x) = 10 - \frac{e^{0,2x+1}}{x}.$$

1. Sur l'intervalle $[1; 25]$, la fonction f est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 0 - \frac{0,2xe^{0,2x+1} - e^{0,2x+1}}{x^2} = e^{0,2x+1} \frac{1 - 0,2x}{x^2}.$$

2. Quel que soit le réel x , $e^{0,2x+1} > 0$ et $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 0,2x$.
- $1 - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x \iff 5 > x \iff x < 5$; donc sur $[1; 5[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $[1; 5[$;
 - $1 - 0,2x < 0 \iff 1 < 0,2x \iff 5 < x \iff x > 5$; donc sur $]5; 25]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $]5; 25]$;
 - $1 - 0,2x = 0 \iff x = 5$; $f'(5) = 0$; $f(5)$ est donc le maximum de f sur $[1; 25]$.

$$f(5) = 10 - \frac{e^{1+1}}{5} = 10 - \frac{e^2}{5} \approx 8,522.$$

$$f(1) = 10 - \frac{e^{0,2+1}}{1} = 10 - e^{1,2} \approx 6,68 \text{ et } f(25) = 10 - \frac{e^{0,2 \times 25 + 1}}{25} = 10 - \frac{e^6}{25} \approx -6,137.$$

D'où le tableau de variations :

x	1	5	25
$f'(x)$			
$f(x)$	$\approx 6,68$	$\approx 8,522$	$\approx -6,137$

3. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.
- Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $[1; 5]$, $f(x) > 0$: l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.
 - Sur l'intervalle $]5; 25]$, la fonction f est continue, car dérivable, $f(5) > 0$ et $f(25) < 0$, donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]5; 25]$, tel que $f(\alpha) = 0$.
 - La calculatrice donne successivement :
 $f(21) \approx 1,368$ et $f(22) \approx -0,064$, donc $21 < \alpha < 22$;
 $f(21,9) \approx 0,09$ et $f(22) \approx -0,064$, donc $21,9 < \alpha < 22,0$;
 $f(21,95) \approx 0,014$ et $f(21,96) \approx -0,002$, donc $21,95 < \alpha < 21,96$.
 - Le logiciel de calcul formel donne :

$$f''(x) = \frac{e^{0,2x+1}(-x^2 + 10x - 50)}{25x^3}.$$

Sur l'intervalle $[1; 25]$, on a $x^3 > 0$ et $e^{0,2x+1} > 0$: le signe de $f''(x)$ est donc celui du trinôme $-x^2 + 10x - 50$.

Pour celui-ci $\Delta = 100 - 4 \times (-1) \times (-50) = -100 > 0$: le trinôme n'a pas de racines, il a donc le signe de $a = -1$; le trinôme et par conséquent la dérivée seconde est négative sur l'intervalle $[1; 25]$: la fonction f est donc concave sur cet intervalle.

Partie B

- D'après la partie A, on a vu que f a pour maximum $f(5) \approx 8,522 \approx 8522$ euros.
Ce maximum est obtenu pour $x = 5$, soit 50 tonnes produites.
- On a vu dans la partie A que f est positive sur l'intervalle $[1; \alpha]$ et que $\alpha \approx 21,95$. La société peut donc fabriquer au maximum 219 tonnes (à une tonne près) d'aliments pour réaliser un bénéfice.