Corrigé du baccalauréat ES Asie 16 juin 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Nous sommes dans le cas d'une expérience de Bernoulli (on obtient un pile ou un face).

Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise, nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli.

Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre de « pile » obtenu, nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathscr{B}(n, p)$, où $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{2}$ (c'est une pièce de monnaie bien équilibrée). Ici nous calculons :

$$p(X = 5) = \binom{10}{5} 0,5^5 \times (1 - 0,5)^5 \approx 0,25$$

C'est la réponse c.

2. X suit la loi normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 3$ et $\sigma = 2$.

On calcule ici :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5)\\
&= 1 - (\mathbb{P}(X \leqslant 3) + \mathbb{P}(3 < X \leqslant 5)) \qquad \text{(la loi est continue, nous pouvons passer à l'égalité)}\\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(3 - 2 \leqslant X \leqslant 3 + 2)\right)\\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)\right)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)\\
&\approx 0,5 - 0,5 \times 0,68\\
&\approx 0,16
\end{aligned}$$

Nous pouvions utiliser la calculatrice, avec : normalcdf$(5, 10 \wedge 99, 3, 2)$.

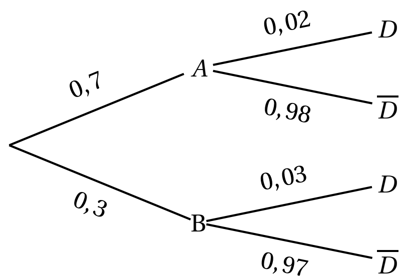
C'est la réponse b.

3. L'amplitude de l'intervalle de confiance au seuil de 0,95 vaut : $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{n}} &= 0,04\\
\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 &= 0,04^2\\
\frac{4}{n} &= 0,0016\\
\frac{4}{0,0016} &= n\\
n &= 2500
\end{aligned}$$

C'est la réponse d.

4. Voici l'arbre de probabilité,ci-dessous, représentant cette situation, sachant que D est l'événement : « une pièce a un défaut ».



En utilisant la formule des probabilités totales, La probabilité d'obtenir une pièce sans défaut est de :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{D}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{D}\cap A\right)+\mathbb{P}\left(\overline{D}\cap B\right)\\ &= \mathbb{P}_A\left(\overline{D}\right)\times\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}_B\left(\overline{D}\right)\times\mathbb{P}(B)\\ &= 0,98\times 0,7+0,97\times 0,3\\ &= 0,686+0,291\\ &= 0,977\end{aligned}$$

C'est la réponse d.

5. Il faut chercher le taux d'évolution moyen t en %, sur 7 années, tel que :

$$\begin{array}{rrcll}
 & 0{,}1140\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^7 & = & 0{,}1732 & \\
\Leftrightarrow & \left(1+\dfrac{t}{100}\right)^7 & = & \dfrac{0{,}1732}{0{,}1140} & \\
\Leftrightarrow & \ln\left(\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^7\right) & = & \ln\left(\dfrac{0{,}1732}{0{,}1140}\right) & \text{(en effet : } \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b\text{)} \\
\Leftrightarrow & 7\ln\left(1+\dfrac{t}{100}\right) & = & \ln\left(\dfrac{0{,}1732}{0{,}1140}\right) & \\
\Leftrightarrow & \ln\left(1+\dfrac{t}{100}\right) & = & \ln\left(\dfrac{0{,}1732}{0{,}1140}\right)\div 7 & \\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)} & = & \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{0{,}1732}{0{,}1140}\right)\div 7} & \text{(en effet : } \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b\text{)} \\
\Leftrightarrow & 1+\dfrac{t}{100} & = & \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{0{,}1732}{0{,}1140}\right)\div 7} & \text{(en effet : } \mathrm{e}^{\ln x} = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^\star\text{)} \\
\Leftrightarrow & t & = & 100\times\left(\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{0{,}1732}{0{,}1140}\right)\div 7} - 1\right) & \\
\Leftrightarrow & t & \approx & 2{,}68 &
\end{array}$$

Nous trouvons 2,68 %. **C'est la réponse c.**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Partie A

1. **a.** Voici le tableau complété, en arrondissant à 10^{-2} près :

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de C	1 900	1913	1926,26	1939,79	1952,58	1967,65	1982,01	1996,65	2011,58

b. La valeur de sortie, pour l'algorithme, est de $n = 8$. Valentine a placé,au premier janvier 2014, 1 900 €. Au bout de 8 ans, la valeur du capital sera supérieure à 2 000 €

2. Si on place 1 250 au départ, alors la valeur du capital ne changera jamais. En effet :

$$1{,}02 \times 1250 - 25 = 1250$$

Nous aurons, un algorithme qui n'atteindra jamais la valeur seuil de 2 000, nous ne sortirons jamais de la boucle : tant que.

Partie B

1. Pour passer d'une année à une autre, l'ancien capital c_n est augmenté de 2 %, soit encore :

$$c_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1{,}02c_n$$

Mais chaque année, les frais de gestion s'élève à 25 €, soit :

$$1{,}02c_n - 25$$

C'est le nouveau capital : c_{n+1}, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$c_{n+1} = 1{,}02c_n - 25$$

2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = c_n - 1250$.

a. Calculons :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & c_{n+1} - 1250 \\ & = & 1,02c_n - 25 - 1250 \\ & = & 1,02c_n - 1275 \\ & = & 1,02(c_n - 1250) \\ & = & 1,02u_n \end{array}$$

Nous venons de démontrer que : $u_{n+1} = 1,02u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,02$.

Le premier terme vaut : $u_0 = c_0 - 1250 = 1900 - 1250 = 650$.

b. Le terme général d'une suite géométrique, de premier terme u_0, vaut : $u_n = u_0 \times q^n = 650 \times 1,02^n$.
Or : $u_n = c_n - 1250$ ainsi $c_n = u_n + 1250$. Donc :

$$c_n = 650 \times 1,02^n + 1250$$

3. On peut calculer :

$$\begin{array}{rcl} c_{n+1} - c_n & = & 650 \times 1,02^{n+1} + 1250 - (650 \times 1,02^n + 1250) \\ & = & 650 \times 1,02^n(1,02 - 1) \\ & = & 650 \times 1,02^n \times 0,02 \\ & = & 13 \times 1,02^n \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13 \times 1,02^n > 0 \Rightarrow c_{n+1} - c_n > 0$.

La suite (c_n) est strictement croissante.

4. Méthode 1 :Nous pourrions modifier l'algorithme comme ci-dessous :

```
Initialisation
Affecter à N la valeur 0
Affecter à C la valeur 1900
Traitement
        Tant que C ⩽ 2100 faire
                Affecter à N la valeur N+1
                Affecter à C la valeur 1,02C − 25
        Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

En sortie, nous trouverions $n = 14$.

Méthode 2 : Nous pourrions aussi chercher la plus grande valeur entière de n pour laquelle $c_n \leqslant 2100$.

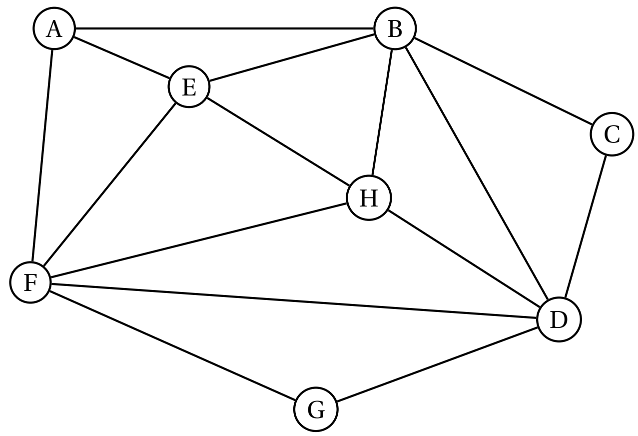
$$
\begin{array}{rrcll}
 & c_n & \leqslant & 2\,100 & \\
\Leftrightarrow & 650 \times 1,02^n + 1\,250 & \leqslant & 2\,100 & \\
\Leftrightarrow & 650 \times 1,02^n & \leqslant & 850 & \\
\Leftrightarrow & 1,02^n & \leqslant & \dfrac{85}{65} & \\
\Leftrightarrow & \ln 1,02^n & \leqslant & \ln\left(\dfrac{85}{65}\right) & \text{(en effet : } \ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b\text{)} \\
\Leftrightarrow & n \ln 1,02 & \leqslant & \ln\left(\dfrac{85}{65}\right) & \\
\Leftrightarrow & n & \leqslant & \ln\left(\dfrac{85}{65}\right) \div \ln 1,02 & \\
\Leftrightarrow & n & \leqslant & 13 & \text{(en effet : } \ln\left(\dfrac{85}{65}\right) \div \ln 1,02 \approx 13,56\text{)}
\end{array}
$$

La plus grande valeur de n pour laquelle $c_n \leqslant 2\,100$ est 13, comme (c_n) est strictement croissante, il faudra 14 années pour que le capital, avec un placement initial de 1 900 €, dépasse 2 100 €.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A



1. **a.** Le graphe G_L n'est pas complet : A et C ne sont pas adjacents, par exemple.

   b. Le graphe G_L est connexe. En effet, la chaîne A-B-C-D-G-F-H-E passe par tous les sommets, ainsi deux points quelconque de ce graphe pourront toujours être reliés par une chaîne.

2. Voici le tableau des sommets degrés :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	5	2	5	4	5	2	4

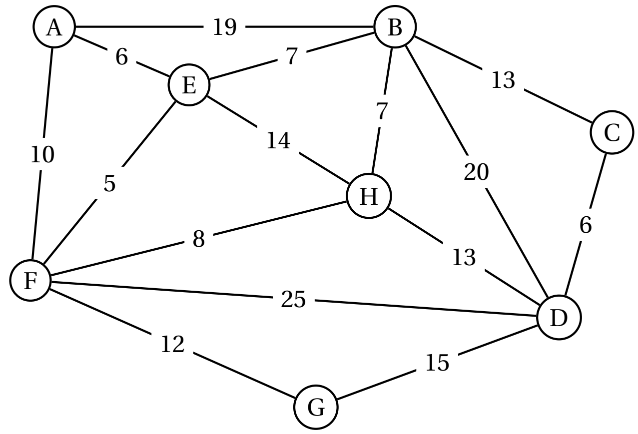
   Il y a plus de deux sommets de degré impair. Le graphe G_L n'admet ni de cycle Eulérien, ni de chaîne Eulériennne.

3. Nous savons que : $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

   Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à H est donné par $m_{18}^{(3)} = 6$.
   Voici l'ensemble des chaînes de longueur 3 reliant A à H :

   A-B-D-H   A-B-E-H   A-E-B-H   A-E-F-H   A-F-D-H   A-F-E-H

Partie B



Nous utilisons l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	select
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
$\vert$	19 (A)	∞	∞	6 (A)	10 (A)	∞	∞	E(6)
$\vert$	13 (E)	∞	∞	$\vert$	10 (A)	∞	20 (E)	F(10)
$\vert$	13 (E)	∞	35 (F)	$\vert$	$\vert$	22 (F)	18 (F)	B(13)
$\vert$	$\vert$	26 (B)	33 (B)	$\vert$	$\vert$	22 (F)	18 (F)	H(18)
$\vert$	$\vert$	26 (B)	31 (H)	$\vert$	$\vert$	22 (F)	$\vert$	G(22)
$\vert$	$\vert$	26 (B)	31 (H)	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	C(26)
$\vert$	$\vert$	$\vert$	31 (H)	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	D(31)

La distance la plus courte vaut : 31
La chaîne qui la réalise vaut : A-F-H-D

EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** Par lecture des résultats du logiciel de calcul formel, nous voyons que :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+1} + 1$$

Nous allons dans un premier temps résoudre :

$$\begin{array}{rrcl} & f'(x) & > & 0 \\ \Leftrightarrow & -\mathrm{e}^{-x+1}+1 & > & 0 \\ \Leftrightarrow & -\exp(-x+1)+1 & > & 0 \\ \Leftrightarrow & x & > & 1 \quad \text{(en effet : solve(-exp(-x+1)+1>0) donne [x>1])} \end{array}$$

Nous en déduisons le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	0		1		10
$-\mathrm{e}^{-x+1}+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	e	$\searrow$	2	$\nearrow$	$10+\mathrm{e}^{-9}$

Avec :

- $f(0) = 0 + \mathrm{e}^{-0+1} = \mathrm{e} \approx 2,718$
- $f(1) = 1 + \mathrm{e}^{-1+1} = 1 + 1 = 2$
- $f(10) = 10 + \mathrm{e}^{-10+1} = 10 + \mathrm{e}^{-9} \approx 10$

b. D'après le tableau de variations, f admet un minimum 2 atteint pour $x = 1$.

2. Par lecture des résultats du logiciel de calcul formel, nous voyons que :

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x+1} \quad \text{or pour tout } x \in [0\ ;\ 10] \quad \mathrm{e}^{-x+1} > 0 \quad \text{ainsi } f''(x) > 0$$

Cette fonction est donc convexe sur $[0 ; 10]$.

Partie B

1. Comme $f(x)$ désigne le coût de revient exprimé en milliers d'euros, il est minimal quand $x = 1$ centaine d'objets (d'après la partie A, 1.b.). Le coût minimum sera de 2 milliers d'euros. Ces 100 objets auront un coût de 2 000 €.

2. **a.** Un objet est vendu 12 €, 1 centaine d'objet est vendu : 12×100 €, soit encore : 1,2 milliers d'euros.

Ainsi x centaines d'objets, sont vendus : $1,2 \times x$ milliers d'euros, soit encore : $1,2x$ milliers d'euros.

b. La marge brute correspond à la différence entre les x centaines d'objets vendus et le coût de revient pour ces même x centaines, soit :

$$g(x) = 1,2x - f(x) = 1,2x - \left(x + \mathrm{e}^{-x+1}\right) = 0,2x - e^{-x+1}$$

c. g est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables sur $[0 ; 10]$ et :

$$g'(x) = 1,2 - f'(x) = 1,2 - \left(-\mathrm{e}^{-x+1} + 1\right) = 0,2 + \mathrm{e}^{x+1}$$

Or pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$:

- $1,2 > 0$
- $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$

Ainsi : $g'(x) > 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$. g est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$.

3. **a.** g est continue sur $[0\ ;\ 10]$ car elle est dérivable sur cet intervalle.

- $g(0) = -\mathrm{e}$ donc $g(0) < 0$.
- $g(10) = 2 - \mathrm{e}^{-9} \approx 2$

0 est compris entre $g(0)$ et $g(10)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction, $g(x) = 0$, admet une solution unique α.

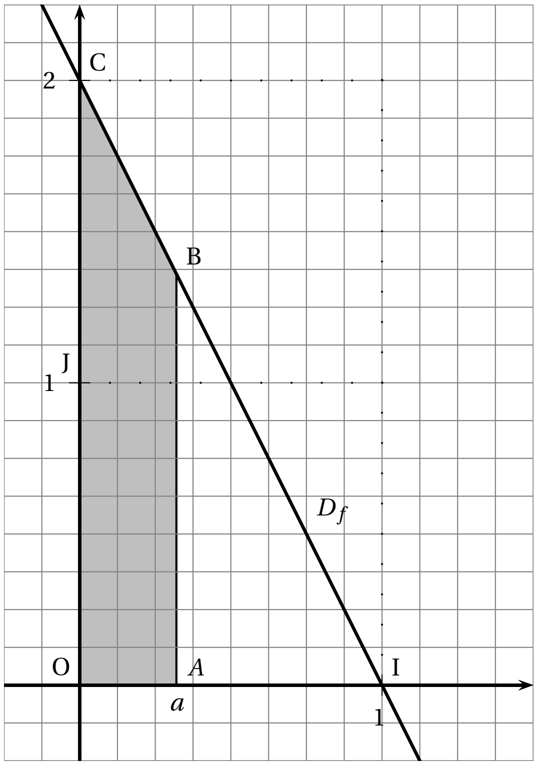
b. $\alpha \approx 1,94445577943$. Un encadrement de α d'amplitude 0,01 vaut :

$$1,94 < \alpha < 1,95$$

4. Comme g est strictement croissante et que $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ sur $[0 ; 10]$.
On en déduit que la quantité minimale d'objets à produire pour que la marge brute soit positive est de 1,95 centaines d'objets, soit 195 objets.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats



Dans un premier temps calculons :

- $\mathscr{A}_{OIC} = \dfrac{Base \times hauteur}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$ U.A.
- $$\begin{aligned}\mathscr{A}_{OABC} &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [F(x)]_0^a\\ &= F(a) - F(0)\end{aligned}$$

  Une primitive F de f vaut : $F(x) = 2x - x^2$.
  Ainsi : $\mathscr{A}_{OABC} = F(a) - F(0) = 2a - a^2$ U.A..

But : chercher la valeur de a dans $[0\,;\,1]$ pour laquelle :

$$\mathscr{A}_{OABC} = \frac{\mathscr{A}_{OIC}}{2} \Leftrightarrow 2a - a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 1 = 0 \ (*)$$

On cherche dans un premier temps les racines de : $2x^2$-$4x + 1$ $(*)$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8$
Comme $\Delta > 0$, (*) admet deux solutions distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$
et : $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 2} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$

Conclusion : $a = x_1 \approx 0,29$.