∽ Corrigé du baccalauréat Asie ES juin 2007 ∾

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

QCM

1. Réponse B : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2. La courbe $(\mathscr{C})$ admet :
   Réponse C : la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote.
3. Dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ admet :
   Réponse B : deux solutions distinctes.
4. Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 3$
   Réponse C : a toutes ses solutions négatives.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau ci-dessous rend compte de l'évolution du prix (en euros) du m^3 d'eau, dans une ville, entre 2002 et 2006.

Années	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Prix en euros du m^3 d'eau y_i	2,64	2,76	2,81	2,95	3,39

I. Le pourcentage d'augmentation du prix entre 2002 et 2006 est $\dfrac{3,39-2,64}{2,64} \approx 0,2840$ soit 28,4 %.

II.

L'allure du nuage suggère deux types d'ajustement :

1. **Ajustement affine**
   a. En arrondissant les coefficients donnés par la calculatrice au centième on obtient :
   $y = 0,17x + 2,57$
   b. 2010 correspond à $x = 8$, soit un prix de $0,17 \times 8 + 2,57 = 1,36 + 2,57 = 3,93$ €.
2. **Ajustement exponentiel**
   a. $z = \ln y = 0,06x + 0,95 \iff$ (pour $y > 0$), $y = \mathrm{e}^{0,06x+0,95} = \mathrm{e}^{0,95} \times \mathrm{e}^{0,06x}$.
   Or $\mathrm{e}^{0,95} \approx 2,5857$.
   On a donc $y = \mathrm{e}^{0,95} \times \mathrm{e}^{0,06x} \approx 2,586\mathrm{e}^{0,06x}$.
   b. Avec ce modèle exponentiel on obtient pour 2010 une prévision de $\mathrm{e}^{0,95} \times \mathrm{e}^{0,06\times 8} \approx 4,1787$ soit au centième près 4,18 € le m^3.

Exercice 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Il y a 6 sommets : l'ordre de $\mathscr{G}$ est donc 6. Les degrés sont dans l'ordre alphabétique : 3 ; 4 ; 2 ; 4 ; 4 ; 3.

b. Il s'agit de trouver une chaîne eulérienne. En classant les sommets dans l'ordre alphabétique la matrice M associée au graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Il n'y a dans cette matrice aucun terme nul, donc il existe au moins entre deux sommets quelconques une chaîne de longueur 2 : ce graphe est connexe.

Il y a de plus deux sommets de degré impair A et F : il existe donc une chaîne eulérienne.

Par exemple : A-D-B-C-E-D-F-A-E-B-F

2. a. Il y a plusieurs sous-graphes complets d'ordre 3 : A-D-E; A-D-F; B-C-E; etc.

Par contre il ne possède pas de sous-graphe complet d'ordre 4.

Le nombre chromatique c du graphe $\mathcal{G}$ est donc supérieur ou égal à 3 et inférieur ou égal à 5, puisque le plus haut degré est 4.

b. On peut trouver une coloration du graphe avec trois couleurs :

couleur 1 : A et B;

couleur 2 : C et D;

couleur 3 : E et F.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{25}{144}$.
2. L'évènement contraire est « les deux feux rencontrés sont au vert », soit l'évènement contraire de celui de la question précédente soit $1 - \dfrac{25}{144} = \dfrac{119}{144}$.

Partie B

1. De même que dans la partie A :
$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{15}{48} = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$.
2. $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) + p(R_1 \cap V_2) + p(O_1 \cap V_2)$.
$p(V_1 \cap V_2) = \dfrac{5}{16}$;
$p(R_1 \cap V_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(V_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{16}$;
$p(O_1 \cap V_2) = p(O_1) \times p_{O_1}(V_2) = 0 \times \dfrac{7}{8} = 0$.
Donc $p(V_2) = \dfrac{5}{16} + \dfrac{7}{16} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Exercice 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

1. a. On a $f'(x) = -2x+10-8\times\dfrac{1}{x} = -2x+10-\dfrac{8}{x} = \dfrac{x(-2x+10)-8}{x} = \dfrac{-2x^2+10x-8}{x} = \dfrac{2\left(-x^2+5x-4\right)}{x} = \dfrac{-2\left(x^2-5x+4\right)}{x}$.

Or d'après l'indication : $(x-1)(x-4) = x^2-4x-x+4 = x^2-5x+4$, donc on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-4)}{x}$.

b. Comme x est supérieur à zéro, le signe de $f'(x)$ est celui de $-2(x-1)(x-4)$: ce trinôme est négatif sauf entre les racines 1 et 4, donc :

- sur $[1\,;\,4]$, $f'(x) \geqslant 0$;
- sur $[4\,;\,5]$, $f'(x) \leqslant 0$;
- $f'(1) = f'(4) = 0$.

c. La fonction f est donc croissante sur $[1\,;\,4]$ de $f(0) = -9$ à $f(4) = -16+40-9-8\ln 4 = 15-8\ln 4 \approx 3,9$, puis décroissante de $f(4)$ à $f(5) = -25+50-9-8\ln 5 = 16-8\ln 5 \approx 3,0909$.

d. On a vu dans la question précédente que le bénéfice maximal est obtenu pour $x = 4$, soit 400 pièces vendues et un bénéfice de $f(4) \approx 3,90965$ dizaines de milliers d'euros, soit 39 097 € environ.

2. a. On a sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \ln x + x\times\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$; donc la fonction g est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Donc la fonction F définie sur $[1\,;\,6]$ par :

$F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 10\dfrac{x^2}{2} - 9x - 8(x\ln(x) - x) = -\dfrac{x^3}{3} + 5x^2 - 9x - 8x\ln(x) + 8x = -\dfrac{x^3}{3} + 5x^2 - x - 8x\ln(x)$ est une primitive de la fonction f.

c. On a $m = \dfrac{1}{6-1}\displaystyle\int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}[F(x)]_1^6 = \dfrac{1}{5}(F(6)-F(1)) = \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{6^3}{3} + 5\times 6^2 - 6 - 8\times 6\ln(6)\right) - \dfrac{1}{5}\left[-\dfrac{1^3}{3} + 5\times 1^2 - 1 - 8\times 1\times\ln(1)\right] = -\dfrac{216}{15} + \dfrac{1}{15} + 36 - 1 + 0,2 - 3,4 - 9,6\ln 6 = -\dfrac{215}{15} + 52 - 9,6\ln 6 = \dfrac{59}{3} - 9,6\ln 6 \approx 2,46$ soit au dixième près 2,5.