# Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie mars 2007

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

1. On lit $f'(-3) = \dfrac{3-1}{-2-(-3)} = 2$ (pente de la tangente en A).

   $f'(-1) = 0$ : tangente horizontale.

2. **a.** Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, la composition par cette fonction exponentielle ne va pas changer les variations de $x \longmapsto \mathrm{e}^{f(x)}$.

   **b.** • $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{f(x)} = 0$.

   • $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{f(x)} = 1$.

   **c.** Comme $g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$, donc $g'(-3) = f'(-3)\mathrm{e}^{f(-3)} = 2 \times \mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$.

3. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln[f(x)] = -\infty$.

   **b.** Sur $]-3,1\ ;\ +\infty[$, $h$ est dérivable et :

   $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, donc $h'(-3) = \dfrac{f'(-3)}{f(-3)} = \dfrac{2}{1} = 2$.

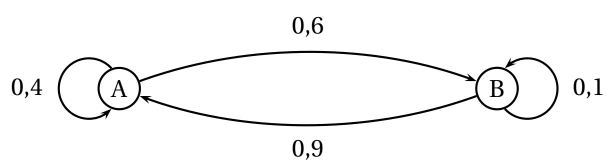
**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Première méthode : graphe probabiliste**

1. Si A gagne la partie de la semaine, la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine suivante est de 0,4 donc la probabilité de rester dans l'état A est $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,4$ et la probabilité de passer de l'état A à l'état B est $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,6$.

   Si A perd la partie, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine semaine suivante, est de $0,9$ donc la probabilité de passer de l'état B à l'état A est $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,9$ et la probabilité de rester dans l'état B est $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,1$. On a donc le graphe probabiliste suivant :




   La matrice de transition associée est donc $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice de l'état initial est $P_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

   L'état probabiliste de la semaine $n$ est $P_n = P_1 \times M^{n-1}$ donc en particulier :

   $P_4 = P_1 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5875 & 0,4125 \end{pmatrix}$.

   Donc la probabilité pour que A gagne la partie de la 4^e^ semaine est égale à 0,587 5

3. $P \times M = P \iff \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \iff$

   $\begin{pmatrix} 0,4x + 0,9(1-x) & 0,6x + 0,(1-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcr} 0,9 - 0,5x & = & x \\ 0,1 + 0,5x & = & 1-x \end{array} \right.$

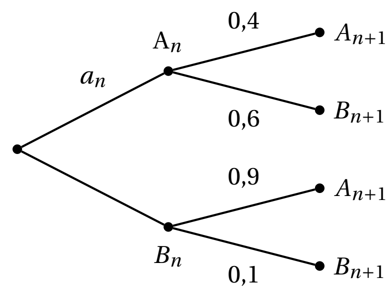
   $\iff \left\{ \begin{array}{rcr} 0,9 & = & 1,5x \\ -0,9 & = & -1,5x \end{array} \right.$, d'où $x = 0,6$.

   L'état stable est donc $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

**4.** Le résultat précédent montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$.
Au bout d'un certain nombre de semaines la probabilité de gagner pour A se rapproche de 0,6.

**Deuxième méthode : probabilité et suites**

**1. a.** On a $p(A_n) = a_n$ et $p(B_n) = 1 - p(A_n) = 1 - a_n$.
Si A gagne la semaine $n$, la probabilité de gagner la semaine $n+1$ est $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,4$ et $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,6$.
Si A perd la semaine $n$, la probabilité de gagner la semaine $n+1$ est
$p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,9$ et $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,1$.
D'où l'arbre suivant :




**b.** D'après la loi des probabilités totales on a :
$p_{A_{n+1}} = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) =$
$a_n \times 0,4 + (1 - a_n) \times 0,9 = 0,9 + 0,4a_n - 0,9a_n = 0,9 - 0,5a_n$, soit :
$a_{n+1} = 0,9 - 0,5a_n$.

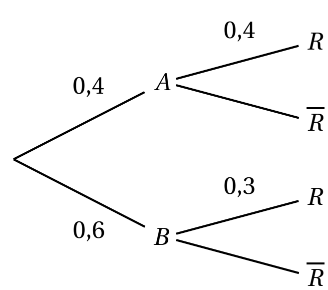
**2. a.** Pour $n \geqslant 1$, on a :
$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,9 - 0,5a_n - 0,6 = 0,3 - 0,5a_n = 0,5\left(\dfrac{0,3}{0,5} - a_n\right) = 0,5(0,6 - a_n) =$
$-0,5(a_n - 0,6) = -0,5u_n$.
$u_{n+1} = -0,5u_n$ signifie que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $-0,5$ de premier terme $u_0 = a_0 - 0,6 = 0,7 - 0,6 = 0,1$.

**b.** On sait que $u_n = u_0 \times q^n = 0,1 \times (-0,5)^n$.
Or $u_n = a_n - 0,6 \iff a_n = u_n + 0,6$, soit :
$a_n = 0,1 \times (-0,5)^n + 0,6$.
On sait que $-1 < -0,5 < 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,5)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$.
On retrouve le fait que la limite de la suite $(a_n)$ est égale à 0,6.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

**1.** La probabilité de tomber sur une pièce défectueuse est égale à :
$p(D_A \cup D_B) = p(D_A) + p(D_B) - p(D_A \cap D_B) = 0,28 + 0,37 - 0,10 = 0,55$.

**2. a.**



**b.** Il faut trouver :
$p(\text{A} \cap R) = p(A) \times p_A(R) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.

**c.** On a de même $p(B \cap R) = p(B) \times p_B(R) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$.
D'après la loi des probabilités totales on a :
$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = 0,16 + 0,18 = 0,34$.

**d.** On a $p_{\text{R}}(A) = \dfrac{p(R \cap A}{p(R)} = \dfrac{0,16}{0,34} = \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{17}$.

**e.** La probabilité de tirer une pièce ayant le défaut $\text{D}_\text{A}$ est égale à 0,4. Les tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante, donc on a une épreuve de Bernoulli. En trois tirages les issues favorables sont :
A–A–B ; A–B–A et B–A–A donc trois tirages favorables dont la probabilité est égale à $0,4^2 \times 0,6$.
La probabilité pour que, sur les 3 pièces choisies, exactement 2 pièces aient le défaut $\text{D}_\text{A}$ est donc égale à :
$3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 3 \times 0,16 \times 0,6 = 0,288$, soit un peu moins de 30 %.

**EXERCICE 4** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

**1.** • Sur [0 ; 1], $f$ est dérivable et sur cet intervalle : $f'(x) = -8x + 8$.
Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 8x \leqslant 8 \iff -8 \leqslant -8x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -8x + 8 \leqslant 8$.
Donc sur [0 ; 1], $f'(x) \geqslant 0$ : la fonction est croissante.

• Sur [1 ; 5], $f$ est dérivable et sur cet intervalle : $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.
Or $1 \leqslant x \leqslant 5 \iff \dfrac{1}{5} leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \iff \dfrac{1}{5} - 1 leqslant \dfrac{1}{x} - 1 \leqslant 1 - 1$ soit $-\dfrac{4}{5} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
Donc sur [1 ; 5] $f'(x) \leqslant 0$ donc $f$ est décroissante.

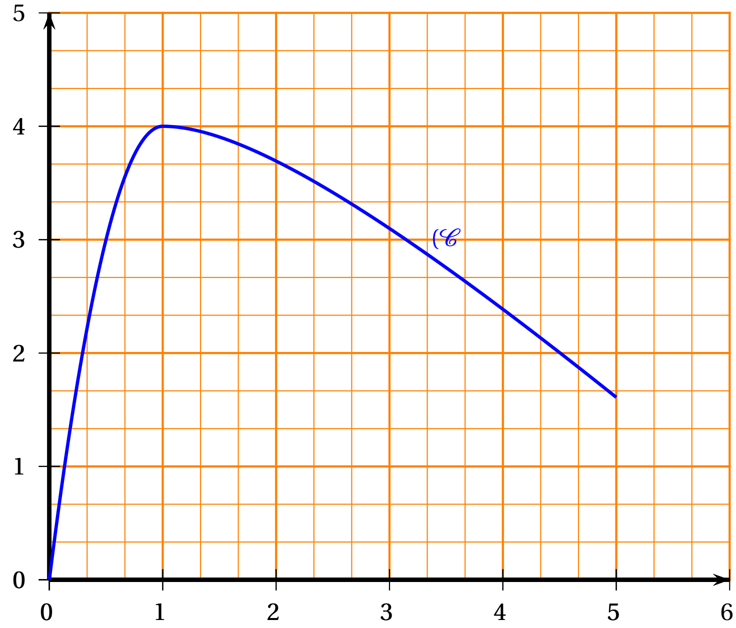
**2. a.** Sur [0 ; 1], une primitive de $f$ est la fonction $F$ définie par $F(x) = -4\dfrac{x^3}{3} + 4x^2$.

**b.** On a vu que sur [0 ; 1] la fonction $f$ est croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 4$ : la fonction est donc positive et l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est égal à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -4\dfrac{1^3}{3} + 4 \times 1^2 - \left[-4\dfrac{0^3}{3} + 4 \times 0^2\right] = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$.

**3. a.** $G$ est dérivable sur [1 ; 5] et sur cet intervalle $G'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
Donc $G$ est une primitive de $g$ sur [1 ; 5]

**b.** $f$ est décroissante de $f(1) = \ln 1 - 1 + 5 = 4$ à $f(5) = \ln 5 - 5 + 5 = \ln 5$. $f$ est donc positive et l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$ est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\text{d}x = \left[G(x) - \dfrac{x^2}{2} + 5x\right]_1^5 = \left[x\ln x - x - \dfrac{x^2}{2} + 5x\right]_1^5 = 5\ln 5 - 5 - \dfrac{5^2}{2} + 5 - \left[1\ln 1 - 1 - \dfrac{1^2}{2} + 5\right] = 5\ln 5 + 20 - 5 - \dfrac{25}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} = 5\ln 5 + 4$.

**4.** Le nombre total d'appels (en milliers) reçus pendant ces 5 minutes est égal à $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\text{d}x = \int_0^1 f(x)\,\text{d}x + \int_1^5 f(x)\,\text{d}x = \dfrac{8}{3} + 5\ln 5 + 4 = 5\ln 5 + \dfrac{20}{3} \approx 14,7139$.
En arrondissant à l'unité le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes est de 14 714.



$(\mathscr{C}$
0
1
2
3
4
5
6