∽ Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle–Calédonie mars 2009 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente (T) = (AB) soit : $\dfrac{0-1,5}{3-0} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$. Réponse B.

2. $f'(x) \leqslant 0$ si la fonction est décroissante donc en particulier sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Réponse C.

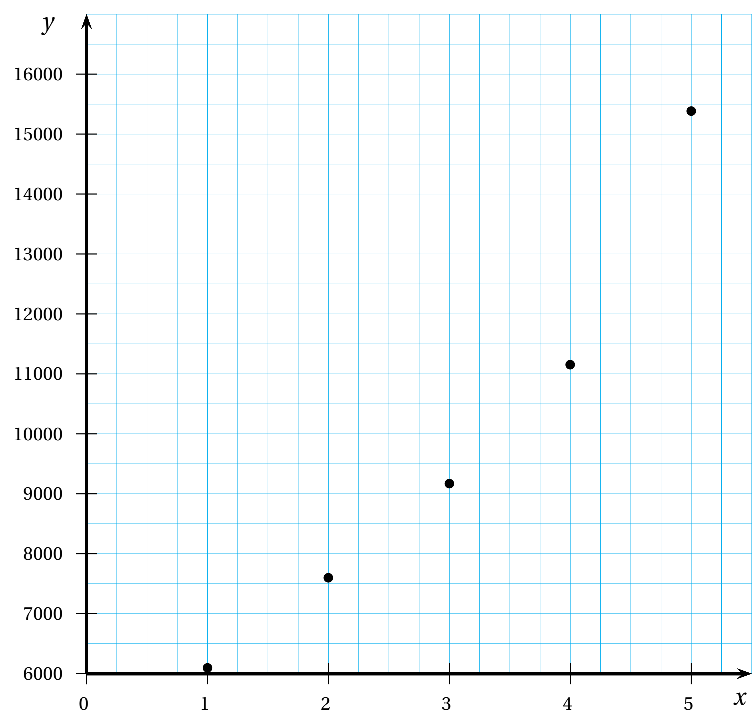
3. L'intégrale est égale à l'aire (en unités d'aire) de la surface limitée par la courbe l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=-2$ et $x=0$. Cette surface contient deux carrés unitaires mais pas quatre. Réponse B.

4. $\ln[f(x)] = 0 \iff f(x) = 1$: cette équation a visiblement trois solutions. Réponse C.

5. g est croissante si f est décroissante. Celle-ci l'est sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Réponse C.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. a.

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5
z_i	8,715	8,936	9,124	9,320	9,641

b. Après arrondi au centième des coefficients la calculatrice donne $z = 0,22x + 8,48$.

c. $z = 0,22x + 8,48 \equiv \ln y = 0,22x + 8,48 \iff y = \mathrm{e}^{0,22x+8,48} \equiv y = \mathrm{e}^{8,48} \times \mathrm{e}^{0,22x}$.
Or $\mathrm{e}^{8,48} \approx 4\,817,4 \approx 4\,817$ à l'unité près. Donc
$y \approx 4\,817\mathrm{e}^{0,22x}$.

d. 2008 correspond au rang $x = 6$, d'où :
$y \approx 4\,817\mathrm{e}^{0,22\times 6} \approx 4817\mathrm{e}^{1,32} \approx 18\,032$ (€).

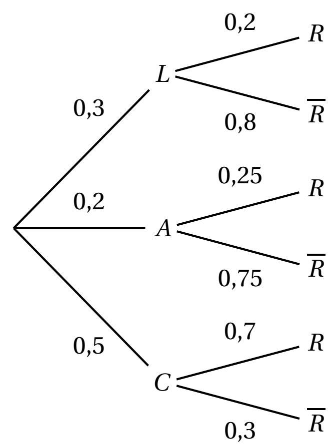
3. Chaque année le montant des revenus est donc multiplié par 1,2 :

Année	2006	2007	2008	2009
Rang x_i de l'année	1	2	3	4
revenus r_i	50 000	51 000	52 020	53 060,40
tiers des revenus $\frac{r_i}{3}$	16 666,67	17 000	17 340	...
remboursements y_i	11 155	15 385	18 032	...

On constate que dès la deuxième année soit en 2008 les remboursements dépassent le tiers des revenus. la banque alertera le ménage en fin de 2008.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1.



2. a. La probabilité que la personne interrogée pratique la natation en compétition et qu'elle participe à la rencontre est :
$p(C \cap R) = p(C) \times p_C(R) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$.

b. On a de même :
$p(L \cap R) = p(L) \times p_C(R) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$.
$p(A \cap R) = p(A) \times p_C(R) = 0,2 \times 0,25 = 0,05$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(R) = p(L \cap R) + p(A \cap R) + p(C \cap R) = 0,06 + 0,05 + 0,35 = 0,46$ soit moins de 50 % des adhérents

3. Il faut trouver : $p_R(C) = \dfrac{p(R \cap C)}{p(R)} = \dfrac{p(C \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,35}{0,46} = \dfrac{35}{46} \approx 0,761 \approx 0,76$ au centième près.

4. a.

S_i	60	75	100	115
p_i	0,39	0,11	0,15	0,35

b. On a $\mathrm{E}(S) = 0,39 \times 60 + 0,11 \times 75 + 0,15 \times 100 + 0,35 \times 115 =$
$23,4 + 8,25 + 15 + 40,25 = 86,90$ (€) .
Cette somme représente la rentrée d'argent moyenne par adhérent pour le club.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

I. Étude d'une fonction

1. La dérivée de $\mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x)$ dérivable est la fonction $u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$.
D'où $f'(x) = 0,5 - 0,5\mathrm{e}^{-0,5x+0,4} = 0,5\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5x+0,4}\right)$.

2. Le signe de $f'(x)$ est celui de la parenthèse $\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5x+0,4}\right)$;

- $1 - \mathrm{e}^{-0,5x+0,4} > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^{-0,5x+0,4} \iff 0 > -0,5x + 0,4 \iff 0,5x > 0,4 \iff x > 0,8$: la dérivée est donc positive sur $[0,8~;~+\infty[$, la fonction est donc croissante sur cet intervalle de $f(0,8) = 0,5 \times 0,8 + \mathrm{e}^{-0,5\times 0,8+0,4} = 0,4 + \mathrm{e}^0 = 0,4 + 1 = 1,4$ à plus l'infini car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x+0,4} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 0,5x = +\infty$.
- $1 - \mathrm{e}^{-0,5x+0,4} < 0 \iff 1 < \mathrm{e}^{-0,5x+0,4} \iff 0 < -0,5x + 0,4 \iff 0,5x < 0,4 \iff x < 0,8$: la dérivée est donc négative sur $[0~;~0,8[$, la fonction est donc décroissante sur cet intervalle de $f(0) = \mathrm{e}^{0,4} \approx 1,492$ à $f(0,8) = 1,4$.
- $1 - \mathrm{e}^{-0,5x+0,4} = 0 \iff x = 0,8$; $f(0,8)$ est donc le minimum de f sur $[0~;~+\infty[$

II. Application économique

1. On a vu le minimum de f est obtenu pour $x = 0,8$, soit 80 objets pour un coût de 1 400 €.

2. a. On a $R'(x) = 0,1 - (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x+0,4} = 0,1 + 0,5\mathrm{e}^{-0,5x+0,4}$.
Comme quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-0,5x+0,4}$, on a aussi $0,5\mathrm{e}^{-0,5x+0,4} > 0$ et enfin
$0,1 + 0,5\mathrm{e}^{-0,5x+0,4} > 0$; donc $R'(x) > 0$: la fonction R est croissante sur $[0~;~+\infty[$.

b. On a $R(0) = -\mathrm{e}^{0,4} \approx -1,492 < 0$.
D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x+0,4} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 0,1x = +\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} R(x) = +\infty$.
La fonction R est continue car dérivable, d'après le théorème de la valeur intermédiaire elle s'annule donc une seule fois en un point $\alpha \in [0~;~+\infty[$.
La calculatrice donne :
$R(3) \approx -0,033$ et $R(4) \approx 0,198$, d'où $3 < \alpha < 4$;
$R(3,1) \approx -0,007$ et $R(3,2) \approx 0,019$ d'où $3,1 < \alpha < 3,2$;
$R(3,12) \approx -0,001$ et $R(3,13) \approx 0,001$ d'où $3,12 < \alpha < 3,13$.

c. Pour 312 objets le résultat est négatif ; il est positif pour la production de 313 objets.