∽ Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2006 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Fausse : la limite de la fonction f en $+\infty$ est 0.
2. Le coefficient directeur de la tangente en C est égal à : $\dfrac{-1-3}{2-0} = -2 = f'(0)$. Fausse
3. Sur $[-2\ ;\ +\infty[$, la fonction est décroissante donc $f'(x) \leqslant 0$. Vraie.
4. On a $F'(x) = f(x)$; or sur $[-2\ ;\ +\infty[$, $f(x) > 0$: la dérivée de F est positive, donc la fonction F est croissante sur $[-2\ ;\ +\infty[$. Fausse.
5. Sur $[-2\ ;\ 0]$, la fonction f est positive et continue car dérivable ; donc l'aire de la surface limitée par $\left(\mathscr{C}_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$ est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. L'aire de cette surface est inférieure à 15 unités d'aire (le rectangle d'aire 15 en rouge n'est pas contenu dans la surface). Vraie.

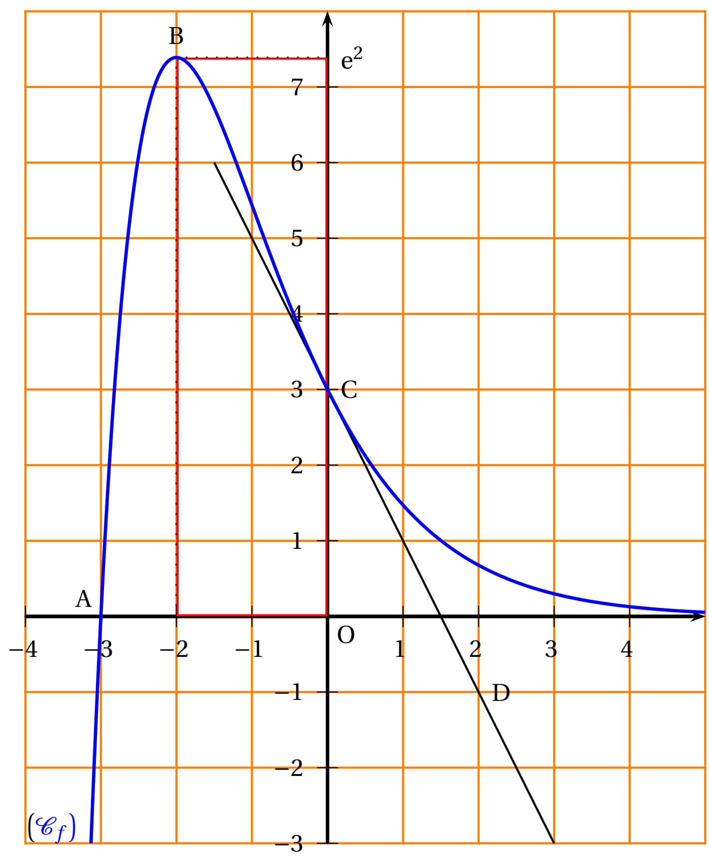
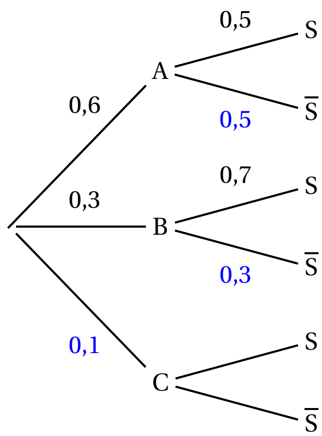


Figure 1

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :



1. Pn a $p(\text{T}) = 1 - p(\text{S}) = 1 - 0,6 = 0,4$.
2. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(\text{S}) = p(\text{A} \cap \text{S}) + p(\text{B} \cap \text{S}) p(\text{C} \cap \text{S})$ ou
   $p(\text{S}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{S}) + p(\text{B}) \times p_{\text{B}}(\text{S}) + p(\text{C}) \times p_{\text{C}}(\text{S})$ soit
   $0,6 = 0,6 \times 0,5 + 0,3 \times 0,7 + 0,1 \times p_{\text{C}}(\text{S}) \iff 0,1 p_{\text{C}}(\text{S}) = 0,6 - 0,3 - 0,21 = 0,09 \iff p_{\text{C}}(\text{S}) = 0,9$.
3. Il faut trouver $p_{\text{S}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{S} \cap \text{B})}{p_{\text{S}}} = \dfrac{0,3 \times 0,7}{0,6} = 0,35$.

Partie B :

1. On a une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,6$.
   Les évènements favorables sont : $\text{SS}\overline{\text{S}}$, $\text{S}\overline{\text{S}}\text{S}$, $\overline{\text{S}}\text{SS}$ chacun de probabilité $0,6^2 \times 0,4$.
   Donc la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines est égale à $3 \times 0,6^2 \times 0,4 = 0,432$.
2. **a.** Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements.
   La probabilité de ne pas se déplacer est $0,4^3 = 0,064$;
   La probabilité de déplacer une seule fois est $3 \times 0,6 \times 0,4^2 = 0,288$;
   La probabilité de déplacer trois fois est $0,6^3 = 0,216$.
   On peut vérifier que $0,064 + 0,288 + 0,432 + 0,216 = 1$.

X	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

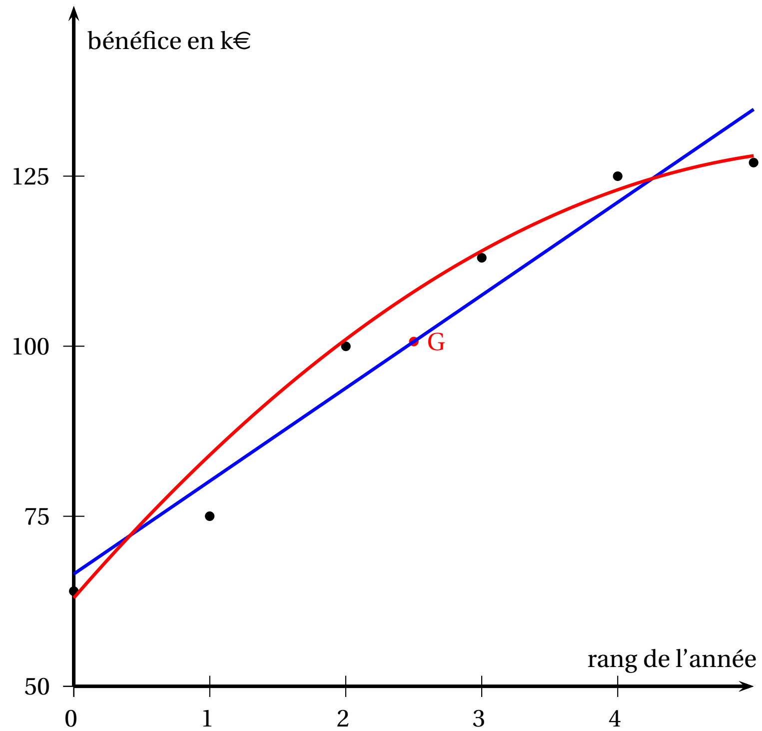
   b. On sait que $E = n \times p = 3 \times 0,6 = 1,8$.

   c. On sait que sur trois semaines le nombre moyen de déplacements est égale à 1,8, déplacements qui reviennent à $1,8 \times 300 = 540$ €.
   L'installateur devra donc demander au minimum 540 € pour trois semaines de maintenance.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a.



b. On a $x_G = \dfrac{0+1+2+3+4+5}{5} = 2,5$, $\quad y_G = \dfrac{64+75+100+113+125+127}{6} \approx 100,7$.
Donc G(3 ; 100, 7).

2. a. La calculatrice donne, les coefficients étant arrondis au centième :
$y = 13,66x + 66,52$.

b. Voir ci-dessus.

c. 2005 correspond au rang $x = 6$, d'où $y = 13,66 \times 6 + 66,52 = 81,96 + 66,52 = 148,48$ (k€).

3. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4x + 23$.

- $-4x + 23 > 0 \iff 23 > 4x \iff x < \dfrac{23}{4}$;
- $-4x + 23 < 0 \iff 23 < 4x \iff x > \dfrac{23}{4}$;
- $-4x + 23 = 0 \iff 23 = 4x \iff x = \dfrac{23}{4}$.

Donc f est croissante sur $[0 ; 5,75]$, décroissante sur $[5,75 ; 6]$, avec un maximum pour $x = 5,75$, valant $f(5,75) = 129,125$.

b. Voir ci-dessus.

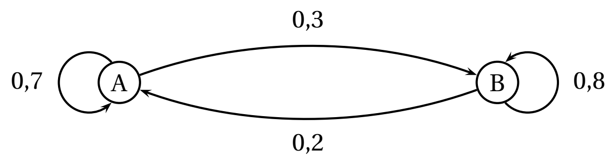
c. Avec ce modèle et pour $x = 6$, on obtient $f(6) = -2 \times 6^2 + 23 \times 6 + 63 = 129$.

4. Le bénéfice réel est égal à $127 \times 1,009 = 128,143 \approx 128,14$.
Le deuxième modèle est plus réaliste que l'ajustement affine.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. On a $a_0 = \dfrac{200}{800} = \dfrac{1}{4} = 0,25$ et $b_0 = \dfrac{600}{800} = 0,75$.

On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$.

3. a. On a $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

b. 2005 correspond au rang 2, donc $P_2 = \begin{pmatrix} 0,3625 & 0,6375 \end{pmatrix}$.

2006 correspond au rang 3, donc $P_3 = P_2 \times M = \begin{pmatrix} 0,3625 & 0,6375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38125 & 0,61875 \end{pmatrix}$.

Inscrits au karaté en 2006 : $800 \times 0,38125 = 305$.

Inscrits au judo en 2006 : $800 \times 0,61875 = 495$.

4. a. On a $P \times M = P \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0,7x + 0,2y & 0,3x + 0,8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \iff$

$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0,7x + 0,2y \\ y & = & 0,3x + 0,8y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,3x - 0,2y & = & 0 \\ -0,3x + 0,2y & = & 0 \end{array} \right.$ Or on a $x + y = 1 \iff y = 1 - x$, d'où

$0,3x - 0,2(1 - x) = 0 \iff 0,5x = 0,2 \iff x = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et enfin $y = 0,6$.

$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

b. Quel que soit l'état initial on sait que l'état P_n converge vers P, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,4$.

Donc le nombre d'inscrits au karaté va tendre vers $800 \times 0,4 = 320$ et celui de judo vers 480.

5. Soit c_n le nombre d'inscrits à ce nouveau club en l'année $2003 + n$; on a

$c_{n+1} = c_n \times 1,1^n$.

D'autre part si a_n et b_n sont les adhérents du premier club respectivement au karaté et au judo on sait que $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 600 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^n$.

La calculatrice permet d'obtenir les résultats suivants pour b_n et c_n :

Année	2003	2004	2005	2006
b_n	600	540	510	495
c_n	405	446	490	539

Réponse : en 2006 l'effectif de l'autre club sera supérieur à celui de la section judo de l'association.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude préliminaire

1. a. On sait que la fonction définie pour $u > 0$, $u \longmapsto \ln u$ est croissante, donc la fonction f est croissante sur $[-2 ; +\infty[$.

b. • Comme $\displaystyle\lim_{x\to -2} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to -2} \ln x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$.

• Comme $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} = 2$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln x = \ln 2$, donc $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln 2$.

• La fonction f est donc croissante de moins l'infini à $\ln 2$.

2. On sait que sur $]-3\ ;\ +\infty[$, $G'(x) = g(x)$.

Le signe de g est celui de G' ; d'après l'énoncé $f(x)$ est négative sur $]-3\ ;\ -2]$ puis positive , donc G décroit puis croit : $G(-2)$ est donc le minimum de la fonction G et $G(-2) = 0$ (la fonction G est positive.)

Partie B

$$g(x) = 2 - \frac{2}{x+3}.$$

1. La fonction g est dérivable sur $]-3\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = -\left(-\dfrac{2\times 1}{(x+3)^2}\right) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$.

Quotient de deux termes supérieur à zéro, $g'(x) > 0$: la fonction g est croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$ de moins l'infini à 2 car $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+3} = 0$.

Enfin $g(-2) = 2 - \dfrac{2}{-2+3} = 2 - 2 = 0$.

2. a. • Comme $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{2}{x+3} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -3} -\frac{2}{x+3} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x) = -\infty$.

Ceci signifie que la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au voisinage de -3.

• Comme $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x+3} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to -3} g(x) = 2$ et $\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x) = \ln 2$.

Ceci signifie que la droite d'équation $y = \ln 2$ est asymptote horizontale à $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au voisinage de plus l'infini.

b. L'ordonnée de A est nulle. Or $f(x) = 0 \iff \ln\left(2 - \dfrac{2}{x+3}\right) = 0 \iff 2 - \dfrac{2}{x+3} = 1 \iff$ $2 = x+3 \iff x = -1$. Donc $\text{A}(-1\ ;\ 0)$.

c. Une équation de la droite (T) est $y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$.

• $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{(x+3)^2}}{\frac{2}{x+3}} = \dfrac{1}{x+3}$, d'où $f'(-1) = \dfrac{1}{-1+3} = \dfrac{1}{2}$.

• $f(-1) = \ln\left(2 - \dfrac{2}{-1+3}\right) = \ln 1 = 0$.

Une équation de la droite (T) est donc $y = \dfrac{1}{2}(x-(-1)) \iff y = \dfrac{1}{2}(x+1)$.

3. Sur $]-3\ ;\ +\infty[$ une primitive de la fonction $x \longmapsto 2$ est la fonction $x \longmapsto 2x$.

Sur $]-3\ ;\ +\infty[$ une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{x+3}$ est la fonction $x \longmapsto 2\ln(x+3)$.

Donc $G(x) = 2x - 2\ln(x+3) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Or $G(-2) = 0 \iff 2\times(-2) + 2\ln(-2+3) + C = 0 \iff -4 + C = 0 \iff C = 4$.

Finalement $G(x) = 2x + 4 - 2\ln(x+3)$.

ANNEXE : à compléter et à rendre avec la copie

Figure fournie pour l'exercice 4