Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie mars 2016

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **5 points**

Question 1

La proportion de gauchers dans la population française est de 13 %.
Un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95 %, de la fréquence de gauchers dans un échantillon de 500 personnes prises au hasard dans la population française est :

a. [0,080 ; 0,180] **b.** [0,085 ; 0,175] $\boxed{\textbf{c.}\ [0{,}100\,;\,0{,}160]}$ **d.** [0,128 ; 0,132]

$n = 500$ et $p = 0,13$ donc $n \geqslant 30$, $np = 65 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 435 \geqslant 5$ donc les conditions pour déterminer un intervalle I de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des gauchers dans un échantillon de taille 500 sont vérifiées :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,13 - 1,96\frac{\sqrt{0,13(1-0,13)}}{\sqrt{500}}\,;\, 0,13 + 1,96\frac{\sqrt{0,13(1-0,13)}}{\sqrt{500}}\right]$$

$$\approx [0,100\,;\,0,160]$$

Question 2

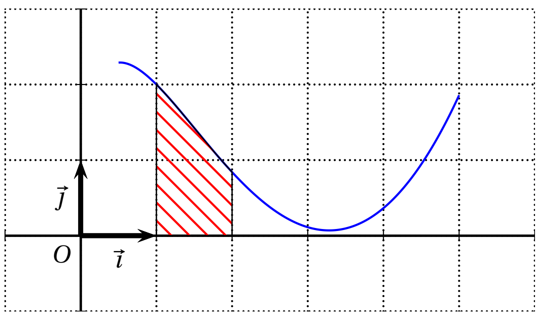
Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1)$ est :

a. $[2\,;\,+\infty[$ **b.** $]0\,;\,2]$ **c.** $]-\infty\,;\,1]$ $\boxed{\textbf{d.}\ ]0\,;\,1]}$

L'inéquation $\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1)$ n'aura de solutions que si $\ln x$ et $\ln(2x+1)$ existent, donc si $x > 0$.

$$\begin{aligned} \ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1) &\iff \ln(3x) \leqslant \ln(2x+1) && \text{propriété de la fonction ln}\\ &\iff 3x \leqslant 2x+1 && \text{croissance de la fonction ln}\\ &\iff x \leqslant 1 \end{aligned}$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par : $f(x) = x^2 - 3x\ln x + 1$
On a représenté, ci-dessous, cette fonction f dans un repère orthonormé :



Question 3

a. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0,5\,;\,3]$.

b. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$.

c. La courbe représentant f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.

$\boxed{\textbf{d.}\ \text{La fonction } f \text{ est concave sur l'intervalle } [0,5\,;\,1,5].}$

$f(x) = x^2 - 3x\ln x + 1$ donc $f'(x) = 2x - 3\ln x - 3x\dfrac{1}{x} = 2x - 3\ln x - 3$ et donc $f''(x) = 2 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{2x-3}{x}$
$f''(x) \leqslant 0$ sur $[0,5\,;\,1,5]$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

Question 4

On note I l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$; on peut affirmer que :

a. $0,5 \leqslant I \leqslant 1$ **b.** $4 \leqslant I \leqslant 7$ $\boxed{\textbf{c.}\ 1 \leqslant I \leqslant 1,75}$ **d.** $2 \leqslant I \leqslant 4$

L'intégrale I est égale à l'aire de la partie hachurée sur le graphique.

Question 5

On souhaite utiliser un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée au centième de la solution α de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$. (On admet que sur cet intervalle l'équation admet bien une unique solution.)
Voici trois algorithmes :

Algorithme 1
Initialisation
a prend la valeur 1
b prend la valeur 3
s prend la valeur 0
Traitement
$n = (b-a)*100$
Pour i allant de 1 à n faire
- x prend la valeur $a + 0,01*i$
- s prend la valeur $s + 0,01*f(x)$

Fin de Pour
Sortie
Afficher s

Algorithme 2
Initialisation
a prend la valeur 1
b prend la valeur 3

Traitement
Tant que $b - a > 0,01$ faire
- c prend la valeur $(a+b)/2$
- si $f(c) > 1$ alors a prend la valeur c
- sinon b prend la valeur c

Fin de Tant que
Sortie
Afficher a

Algorithme 3
Initialisation
a prend la valeur 1
b prend la valeur 3
Traitement
Pour x allant de 1 à 3 faire
- Si $f(x) < 1$ alors a prend la valeur $(a+b)/2$
- sinon b prend la valeur $(a+b)/2$

Fin de Pour
Sortie
Afficher a

a. L'algorithme 1 affiche une valeur approchée au centième de α.

b. L'algorithme 2 affiche une valeur approchée au centième de α.

c. L'algorithme 3 affiche une valeur approchée au centième de α.

d. Aucun des trois algorithmes n'affiche de valeur approchée au centième de α.

L'algorithme 2 correspond à la recherche d'une solution d'équation par dichotomie.

EXERCICE 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Deux supermarchés concurrents, Alphamarché et Bétamarché ouvrent simultanément un service de retrait permettant à leurs clients de récupérer leurs courses après avoir passé leur commande sur internet.
Afin de promouvoir leur service de retrait, chacun organise une campagne de publicité.
Alphamarché contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages mensuels où les clients qui utilisent les services de retrait se prononcent tous en faveur d'un seul service de retrait, celui d'Alphamarché ou celui de Bétamarché.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché.
Les sondages mensuels ont permis de mettre en évidence que les arguments publicitaires font évoluer chaque mois la répartition.
On décide de modéliser cette évolution en considérant que 10 % des personnes préférant Alphamarché et 15 % des personnes préférant Bétamarché changent d'avis d'un mois sur l'autre.
Le mois du début de la campagne est noté mois 0.
On interroge, au hasard, un client faisant ses courses dans l'un des deux services de retrait.
Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que le client interrogé préfère Alphamarché le mois n ;
- b_n la probabilité qu'il préfère Bétamarché le mois n ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne désignant l'état probabiliste au mois n.

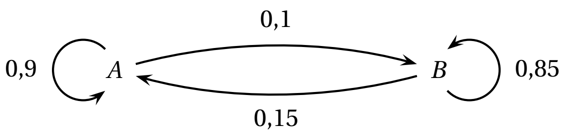
1. Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché donc $a_0 = 0,2$ et $b_0 = 1 - a_0 = 1 - 0,2 = 0,8$; on a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2. On note A, l'état « Le client interrogé préfère Alphamarché » et B l'état « Le client interrogé préfère Bétamarché ».

10 % des clients qui préfèrent Alphamarché changent de supermarché le mois suivant, donc il reste 90 % de clients fidèles à Alphamarché d'un mois au suivant.

15 % des clients qui préfèrent Bétamarché changent de supermarché le mois suivant, donc il reste 85 % de clients fidèles à Bétamarché d'un mois au suivant.

On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



3. a. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,9\,a_n + 0,15\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,1\,a_n + 0,85\,b_n \end{array}\right.$

Ce qui se traduit sous forme matricielle par : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

La matrice de transition de ce graphe est donc : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

b. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 & 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0,18 + 0,12 & 0,02 + 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

4. **a.** D'après le cours, on peut dire que, pour tout n, $P_n = P_0 \times M^n$.
   Cette propriété est démontrée souvent dans l'année de terminale et peut être considérée comme devant être connue des élèves ; si on veut la redémontrer dans cette question, on utilisera une démonstration par récurrence.

   b. On trouve à la calculatrice : $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}43125 & 0{,}56875 \end{pmatrix}$
   Cela veut dire que le 3$^{\text{e}}$ mois, il y aura à peu près 43 % de clients qui choisiront Alphamarché, et 57 % qui choisiront Bétamarché.

5. D'après la calculatrice, la suite (a_n) semble croissante, et la suite (b_n) décroissante.
   Toujours en utilisant la calculatrice, on trouve :
   $P_4 = P_0 \times M^4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}4734 & 0{,}5266 \end{pmatrix}$ et $P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}5051 & 0{,}4949 \end{pmatrix}$
   Donc, à partir du 5$^{\text{e}}$ mois, les clients préfèreront le retrait d'Alphamarché à celui de Bétamarché.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 5 points

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique. Les voyageurs partent soit pour un séjour court, soit pour un séjour long.
Parmi les passagers voyageant en classe économique, 35 % partent pour un séjour long alors que parmi les passagers ayant choisi la classe confort, 70 % ont opté pour un séjour long.

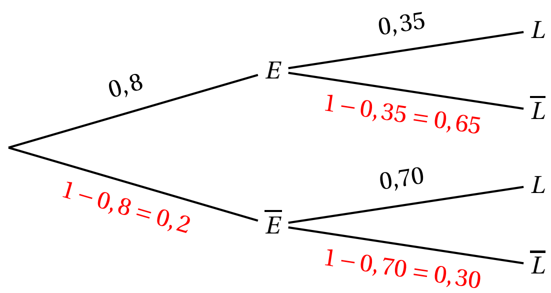
Partie A

On choisit au hasard un passager du vol.
On note les évènements suivants :

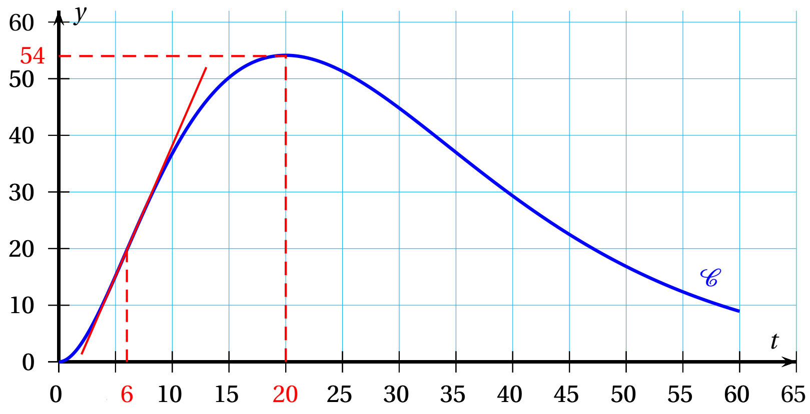
- E : « Le passager voyage en classe économique. »
- L : « Le passager part pour un séjour long. »

On note $\overline{E}$ et $\overline{L}$ les évènements contraires des évènements E et L.

1. Sur 275 passagers, il y en a 220 qui voyagent en classe économique. Comme on choisit au hasard un passager du vol, il y a équiprobabilité, donc $p(E) = \dfrac{220}{275} = 0,8$.
2. D'après le texte, $p_E(L) = 0,35$ et $p_{\overline{E}}(L) = 0,70$.
   On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



3. La probabilité que le passager choisi parte en classe économique pour un séjour long est :
   $p(E \cap L) = p(E) \times p_E(L) = 0,8 \times 0,35 = 0,28$
4. D'après la formule des probabilités totales :
   $p(L) = p(E \cap L) + p(\overline{E} \cap L) = 0,28 + 0,2 \times 0,7 = 0,28 + 0,14 = 0,42$
5. On choisit au hasard un passager partant pour un long séjour.
   La probabilité que ce passager voyage en classe économique est :
   $p_L(E) = \dfrac{p(E \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0,28}{0,42} = \dfrac{2}{3}$



Partie B

Lors de l'embarquement, chaque passager enregistre un bagage qui sera placé dans la soute de l'avion pendant le vol. Le poids de ce bagage ne doit pas excéder 20 kg. Dans le cas où le poids de son bagage dépasserait 20 kg, le passager doit s'acquitter d'une « taxe d'excédent de bagage ». Le montant à payer en cas d'excédent est précisé dans le tableau ci-dessous.

Poids p (en kg) du bagage	Taxe d'excédent de bagage
$20 < p \leqslant 21$	12 €
$21 < p \leqslant 22$	24 €
$22 < p \leqslant 24$	50 €
$p > 24$	20 €/kg au-delà des 20 kg autorisés

On choisit au hasard un bagage devant être transporté dans la soute de l'avion.
On admet que le poids de ce bagage, exprimé en kg, est modélisé par une variable aléatoire M qui suit la loi normale d'espérance 18,4 et d'écart type 1,2.

1. La probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage est $p(M > 20) \approx 0,091$.
2. La probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage de 24 € est $p(21 < M \leqslant 22) \approx 0,014$.

Partie C

L'enregistrement des bagages des passagers est possible pendant une durée de 2 h.
Un passager du vol est choisi au hasard et on note T la durée (en minutes] qui s'est écoulée entre le début des enregistrements des bagages et l'arrivée de ce passager au comptoir d'enregistrement.
On admet que T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0~;~120]$.
La probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées est $\dfrac{30}{120} = 0,25$.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 5 points

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Partie A

1. À l'aide du graphique, on peut estimer que le nombre de malades est maximal au bout de 20 jours ; le nombre approximatif de malades est de 54 milliers (voir graphique).

2. Le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte correspond au jour où la tangente à la courbe a un coefficient directeur maximum; c'est autour du 6e jour.

Partie B

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0; 60] par : $f(t) = t^2\mathrm{e}^{-0,1t}$
où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.
Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$
- $f''(t) = \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$
- $F(t) = \left(-10t^2 - 200t - 2000\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$

où f' désigne la dérivée de f, f'' désigne sa dérivée seconde et F une primitive de f.

1. $f(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-0,1t}$ donc $f'(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-0,1t} + t^2 \times (-0,1)\,\mathrm{e}^{-0,1t} = 0,1t\,(20-t)\,\mathrm{e}^{-0,1t}$

2. a. Pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$ et $T \geqslant 0$ sur $[0;60]$; donc $f'(t)$ est du signe de $20-t$.
Donc $f'(t) \geqslant 0$ sur $[0;20]$ et $f'(t) \leqslant 0$ sur $[20;60]$.
De plus, $f'(0) = 0$.

b. $f(0) = 0$, $f(20) = 400\,\mathrm{e}^{-2} \approx 54,13$ et $f(60) = 3600\,\mathrm{e}^{-6} \approx 8,92$
Le tableau de variation de la fonction f sur $[0;60]$ est :

x	0		20		60
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$400\,\mathrm{e}^{-2}$	↘	$3600\,\mathrm{e}^{-6}$

3. Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par $N = \dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. La fonction F est une primitive de la fonction f donc : $\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t = F(60) - F(0)$
$F(60) = -50000\,\mathrm{e}^{-6}$ et $F(0) = -2000$ donc $\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t = -50000\,\mathrm{e}^{-6} + 2000$
Donc $N = \dfrac{1}{60}\left(-50000\,\mathrm{e}^{-6} + 2000\right) = \dfrac{1}{3}\left(100 - 2500\,\mathrm{e}^{-6}\right)$

b. $N \approx 31,268$; cela correspond au nombre moyen de malades en milliers, donc le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine, est de 31 270.

4. a. La courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse t_0 si la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe en t_0.

$$f''(t) = 0 \iff \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right)\mathrm{e}^{-0,1t} = 0 \iff 0,01t^2 - 0,4t + 2 = 0$$
$$\iff t^2 - 40t + 200 = 0 \text{ (en multipliant par 100)}$$

$\Delta = 40^2 - 4 \times 1 \times 200 = 800 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$t' = \frac{40+\sqrt{800}}{2} = \frac{40+20\sqrt{2}}{2} = 20 + 10\sqrt{2} \approx 34,14 > 15 \text{ et } t'' = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5,85 < 15$$

On étudie le signe de $f''(t)$ sur $[0;60]$:

t	0		$20-10\sqrt{2}$		15		$20+10\sqrt{2}$		60
$f''(t)$		+	0		−		0	+	

Sur l'intervalle $[0;15]$, la courbe $\mathscr{C}$ admet donc un seul point d'inflexion d'abscisse $20 - 10\sqrt{2}$ dont la valeur arrondie à l'unité est 6.

b. Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité de la courbe.
Pour $0 \leqslant t < 20-10\sqrt{2}$, $f''(t) > 0$, donc la fonction f est convexe sur $[0\,;\,20-10\sqrt{2}]$.
Pour $20-10\sqrt{2} < t \leqslant 15$, $f''(t) < 0$, donc la fonction f est concave sur $[20-10\sqrt{2}\,;\,15]$.
Cette abscisse du point d'inflexion correspond donc au moment où la fonction passe de convexe à concave, ce qui signifie que la propagation de la maladie commence à décroitre.