Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers 13 juin 2017

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Les justifications n'étaient pas demandées, elles sont données ici à titre indicatif

1. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;9]$, alors :

   a. $p(1 < X < 9) = \frac{1}{8}$ **b.** $p(5 < X < 9) = \frac{1}{2}$ **c.** $p(1 < X < 3) = \frac{3}{8}$ **d.** $p(1 < X < 2) = \frac{1}{2}$

   Solution : Si X suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels c et d tels que $[c\,;\,d] \subset [a\,;\,b]$ on a $p(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a}$ donc ici $p(5 < X < 9) = \dfrac{9-5}{9-1} = \dfrac{1}{2}$

2. Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,01 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, il faut interroger :

   a. 200 personnes **b.** 400 personnes **c.** 10 000 personnes **d.** 40 000 personnes

   Solution :
   L'intervalle de confiance au niveau 95% est $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec f la fréquence observée sur l'échantillon et n la taille de l'échantillon. L'amplitude de I est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \iff \sqrt{n} = 200 \iff n = 40\,000$

3. La solution de l'équation $x^{23} = 92$ est égale à :

   a. 4 **b.** 1,2 **c.** $\mathrm{e}^{\frac{\ln(92)}{23}}$ **d.** $\mathrm{e}^{\frac{\ln(23)}{92}}$

   Solution : L'équation n'a de sens que sur $]0\,;\,+\infty[$ puisque l'exposant est impair
   $x^{23} = 92 \iff \ln\left(x^{23}\right) = \ln(92) \iff 23\ln(x) = \ln(92) \iff \ln(x) = \dfrac{\ln(92)}{23} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{\ln(92)}{23}}$

4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10~;~10]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-10		-5		3		10
$g(x)$	7	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-6

On note $I = \displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a. $-5 \leqslant I \leqslant 3$ **b.** $2 \leqslant I \leqslant 4$ **c.** $16 \leqslant I \leqslant 32$ **d.** $4 \leqslant I \leqslant 8$

Solution :

Sur $[-5~;~3]$, $2 \leqslant g(x) \leqslant 4$ or l'intégrale conserve l'ordre donc on a $\displaystyle\int_{-5}^{3} 2\,dx \leqslant \int_{-5}^{3} g(x)\,dx \leqslant \int_{-5}^{3} 4\,dx$

or $\displaystyle\int_{-5}^{3} 2\,dx = [2x]_{-5}^{3} = 6+10 = 16$ et $\displaystyle\int_{-5}^{3} 4\,dx = [4x]_{-5}^{3} = 12+20 = 32$

EXERCICE 2 — 6 POINTS

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20~;~20]$ par

$$f(x) = (-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}.$$

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20~;~20]$.

Solution : f est le produit de fonctions dérivables sur $[-20~;~20]$ donc elle est dérivable sur $[-20~;~20]$

$f = u\mathrm{e}^{v} \implies f' = u'\mathrm{e}^{v} + u\left(v'\mathrm{e}^{v}\right) = (u'+uv')\mathrm{e}^{v}$

avec $\begin{cases} u(x) = -2x+30 \\ v(x) = 0,2x-3 \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = -2 \\ v'(x) = 0,2 \end{cases}$

$\forall x \in [-20~;~20]$, $f'(x) = \Big(-2+0,2(-2x+30)\Big)\mathrm{e}^{0,2x-30} = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [- 20; 20] .
On précisera la valeur exacte du maximum de f.

Solution : $\forall x \in [-20~;~20]$, $\mathrm{e}^{0,2x-30} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0,4x+4$

$-0,4x+4 > 0 \iff x < 10$

on en déduit les variations de $f(x)$

x	-20		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-20)$	$\nearrow$	$\frac{10}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$f(20)$

$f(-20) = 70\mathrm{e}^{-7} \approx 0{,}06$ et $f(20) = -10\mathrm{e} \approx -27{,}2$

Le maximum de $f(x)$ sur $[-20\ ;\ 20]$ est atteint en $x = 10$ et a pour valeur $f(10) = \dfrac{10}{\mathrm{e}} \approx 3{,}7$

2. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;\,20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.

Solution : Sur $[-20\ ;\ 10]$, $f(x) \geqslant f(-20) > -2$ donc l'équation $f(x) = -2$ n'admet aucune solution sur $[-20\,;\,10]$

Sur $[10\,;\,20]$, f est continue et strictement croissante à valeurs dans $\left[f(20)\ ;\ f(10)\right]$

or $-2 \in \left[f(20)\ ;\ f(10)\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $[10\ ;\ 20]$ donc sur $[-20\,;\,20]$

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Solution : Par balayage on a $15{,}8 \leqslant \alpha \leqslant 15{,}9$

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10x+200)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$ $(-2x+30)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$
2	Dériver $(2x+30)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$ $(-0{,}4x+4)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$
3	Dériver $(-0{,}4x+4)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$ $(-0{,}08x+0{,}4)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$

Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

a. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution :

La première ligne du logiciel permet de donner une primitive de f :

$F(x) = (-10x+200)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$

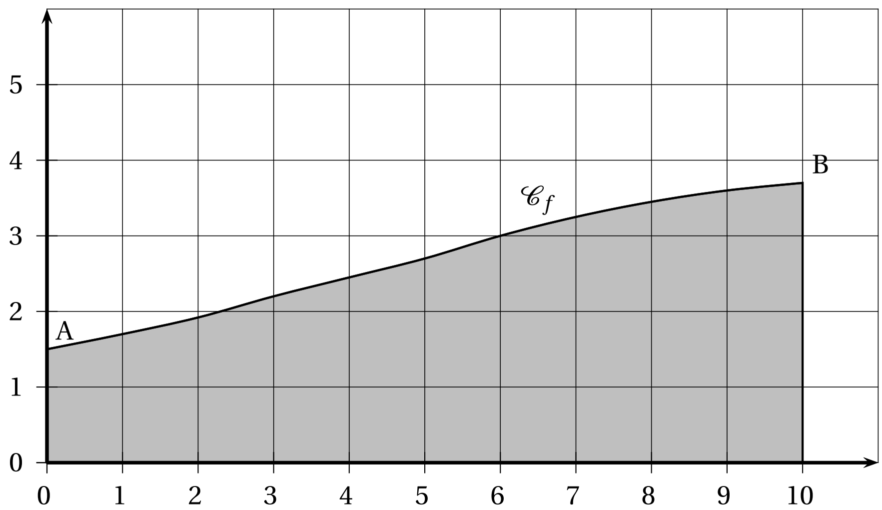
alors $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_{10}^{15} = F(15) - F(10) = 50\mathrm{e}^{0} - 100\mathrm{e}^{-1} = 50 - \frac{100}{\mathrm{e}}$

b. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Solution : f est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est croissante sur cet intervalle
la dérivée de f' est $f''(x) = (-0{,}08x + 0{,}4)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$ d'après la 3ème ligne du logiciel or $\mathrm{e}^{0{,}2x-3} > 0$ sur $[-20\,;\,20]$

sur $[-20\,;\,20]$, $f''(x) \geqslant 0 \iff -0{,}08x + 0{,}4 \geqslant 0 \iff x \leqslant 5$
On en déduit que f est convexe sur $[-20\,;\,5]$

Partie B
Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie dans la partie A sur l'intervalle $[0;\,10]$. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et $f(x)$ représente l'altitude, exprimée en km.
On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M. Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\dfrac{15}{100} = 0{,}15$.

1. On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.

Solution : le dénivelé, en km, est donné par $f(10) - f(0) = \dfrac{10}{\mathrm{e}} - \dfrac{30}{\mathrm{e}^3} \approx 2{,}185$ donc le dénivelé de cette piste est de 2 185 mètres environ

2. La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.

— La piste sera classée noire, c'est-à-dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %.

— La piste sera classée rouge, c'est-à-dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %).

— Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c'est-à-dire facile.

Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.

Solution : Il s'agit donc ici d'étudier les variations de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 10]$ puisque la pente correspond au coefficient directeur de la tangente donc au nombre dérivé.
D'après la dernière question de la partie A, on peut déduire les variations de f'

x	0		5		10
$f''(x)$		+	0	-	
$f'(x)$	$4\mathrm{e}^{-3}$	↗	$2\mathrm{e}^{-2}$	↘	0

$2\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}27$ donc la pente maximale est de 27% ce qui classe cette piste en piste rouge car $25 < 27 < 40$ donc aucune portion de pente supérieure à 40% et certaines portions dépasse 25% de pente

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m^2 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m^2.

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018.

Solution : La surface envahie au 1$^{\text{er}}$ janvier 2017 était de 120 m^2, au printemps le jardinier en arache 10% soit 12 m ^{2} la plante envahie à nouveau 4 m^2
Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018, la surface envahie est de $120 - 12 + 4 = 112\text{m}^2$

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2017 + n$.
La suite (u_n) est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 4$.

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2017.
Recopier et compléter les lignes L1, L3, L4 et L7 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.
On ne demande pas de faire fonctionner l' algorithme.

Solution :

L1	U prend la valeur 120
L2	N prend la valeur 0
L3	Tant que U > 60
L4	U prend la valeur 0,9U+4
L5	N prend la valeur $N+1$
L6	Fin tant que
L7	Afficher 2017 + N

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 40$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et préciser le premier terme.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0{,}9u_n + 4 - 40 = 0{,}9u_n - 36 = 0{,}9\,(u_n - 40) = 0{,}9v_n$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 40 = 80$.

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 80 \times 0{,}9^n$

c. Justifier que $u_n = 80 \times 0{,}9^n + 40$ pour tout entier naturel n.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 40 = 80 \times 0{,}9^n + 40$

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation
$80 \times 0{,}9^n + 40 \leqslant 60$.

Solution :

$$\begin{aligned} 80 \times 0{,}9^n + 40 \leqslant 60 &\iff 0{,}9^n \leqslant 0{,}25 \\ &\iff \ln\left(0{,}9^n\right) \leqslant \ln(0{,}25) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}9)} \quad \text{car } \ln(0{,}9) < 0 \end{aligned}$$

or $\dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}9)} \approx 13{,}2$

donc sur $\mathbb{N}$, $80 \times 0{,}9^n + 40 \leqslant 60 \iff n \geqslant 14$

b. En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier de l'année 2017 .

Solution : On en déduit qu'à partir de 2031 (2017+14) la superficie envahie sera réduite au moins de moitié par rapport au début 2017

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

Solution : $|0{,}9| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40$

Le jardinier ne pourra donc pas faire disparaître complétement la plante car la surface envahie se stabilisera au bout d'un certain temps à 40 m^2

EXERCICE 3 5 POINTS

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection présidentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B.

Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis.

Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote.

Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisée de la façon suivante.

Chaque mois :

- 5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.
- 3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A. On représente ce modèle par un graphe probabiliste $(\mathcal{G})$ de sommets A et B où :

- A est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A » ;
- B est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».

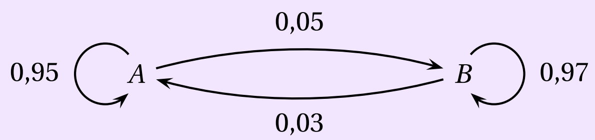
Dans la suite de l'exercice, on note :

- a_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $a_0 = 0,65$.
- b_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le n-ième mois après le début de la campagne.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Dessiner le graphe probabiliste $(\mathcal{G})$ de sommets A et B.

Solution :



b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Solution :
$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$

2. Démontrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$.

Solution : par définition on a $P_1 = P_0 M$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$

donc on a bien $P_1 = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$

3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0{,}05a - 0{,}03b & = & 0 \\ a + \quad b & = & 1 \end{array}\right. .$$

Solution : $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} PM & = & P \\ a+b & = & 1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcl} PM & = & P \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0{,}95a + 0{,}03b & = & a \\ 0{,}05a + 0{,}97b & = & b \\ a + \quad b & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -0{,}05a + 0{,}03b & = & 0 \\ 0{,}05a - 0{,}03b & = & 0 \\ a + \quad b & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0{,}05a - 0{,}03b & = & 0 \\ a + \quad b & = & 1 \end{array}\right.$$

b. Résoudre le système précédent.

Solution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0{,}05a - 0{,}03b & = & 0 \\ a + \quad b & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5a - 3b & = & 0 \\ b & = & 1-a \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5a - 3(1-a) & = & 0 \\ b & = & 1-a \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0{,}375 \\ b & = & 0{,}625 \end{array}\right.$$

c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question **3. b.**

Solution :
Au bout d'un certain nombre de mois, la probabilité qu'un adhérent déclare voter pour le candidat A se stabilisera à 0,375
donc le candidat A peut espérer 37,5% des voix et B peut en espérer 62,5%

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}03$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n M$ soit $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{pmatrix}$

donc $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}03b_n = 0{,}95a_n + 0{,}03\,(1 - a_n)$
On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}03$

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$v_n = a_n - 0{,}375$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$ et préciser le premier terme.

Solution :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} , v_{n+1} &= a_{n+1} - 0{,}375 \\ &= 0{,}92a_n + 0{,}03 - 0{,}375 \end{aligned}$$

$= 0{,}92a_n - 0{,}345$
$= 0{,}92\,(a_n - 0{,}375)$
$= 0{,}92v_n$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 0{,}375 = 0{,}275$.

c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $a_n = 0{,}275 \times 0{,}92^n + 0{,}375$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 0{,}275 \times 0{,}92^n$ or $v_n = a_n - 0{,}375$ soit $a_n = v_n + 0{,}375$
on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0{,}275 \times 0{,}92^n + 0{,}375$

5. La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.

Solution : $a_{11} = 0{,}275 \times 0{,}92^{11} + 0{,}375 \approx 0{,}48$
Donc les intentions de votes seraient de 48% pour le candidat A au bout de 11 mois donc le candidat B serait probablement élu

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Commun à tous les candidats

Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Une étude statistique met en évidence que :

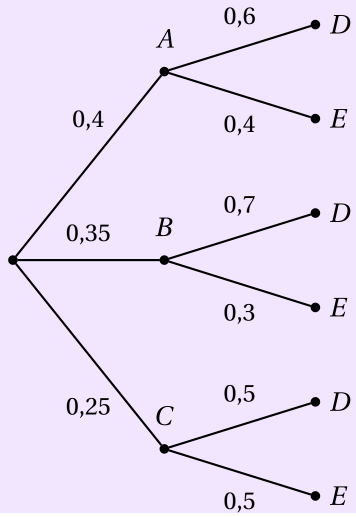
- 40 % des embarcations louées sont des pédalos ;
- 35 % des embarcations louées sont des kayaks ;
- les autres embarcations louées sont des bateaux électriques ;
- 60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure ;
- 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure ;
- la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note A, B, C, D et E les évènements suivants :

- A : « l'embarcation louée est un pédalo » ;
- B : « l'embarcation louée est un kayak » ;
- C :« l'embarcation louée est un bateau électrique » ;
- D :« l'embarcation est louée pour une durée de 1 heure » ;
- E : « l'embarcation est louée pour une durée de 2 heures ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

Solution :



2. Calculer la probabilité $p(A \cap E)$.

Solution :
$p(A \cap E) = p(A) \times p_A(E) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

3. Montrer que la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.

Solution : On cherche $p(E)$
A , B et C forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E) \\ &= 0{,}16 + p(B) \times p_B(E) + p(C) \times p_C(E) \\ &= 0{,}16 + 0{,}105 + 0{,}125 = 0{,}39 \end{aligned}$$

4. Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique ? Arrondir le résultat au centième.

Solution : On cherche $p_E(C)$

$$p_E(C) = \frac{p(E \cap C)}{p(E)} = \frac{0{,}125}{0{,}39} \approx 0{,}32$$

5. La base nautique pratique les tarifs suivants :

	1 heure	2 heures
Pédalo	15 €	25 €
Kayak	10 €	16€
Bateau électrique	35 €	60€

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique.

Solution : On choisit une embarcation au hasard. Soit T la variable aléatoire donnant le tarif de location de cette embarcation.
On détermine alors la loi de probabilité de T puis son espérance que l'on multiplie enfin par 200
$p(T = 15) = p(A \cap D) = 0{,}24$, $p(T = 10) = p(B \cap D) = 0{,}245$ ... on obtient le tableau suivant :

t_i	10 €	15 €	16 €	25 €	35 €	60 €
événement	$B \cap D$	$A \cap D$	$B \cap E$	$A \cap E$	$C \cap D$	$C \cap E$
$p(T = t_i)$	0,245	0,24	0,105	0,16	0,125	0,125

$E(T) = 10 \times 0{,}245 + 15 \times 0{,}24 + 16 \times 0{,}105 + 25 \times 0{,}16 + 35 \times 0{,}125 + 60 \times 0{,}125 = 23{,}605$
Ce qui représente le tarif moyen de location d'une embarcation
donc la recette espérée pour 200 embarcations est de $200 \times 23{,}605 = 4\,721$ €

Partie B

Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième

Les bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.
Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.
On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. À l'aide de la calculatrice, calculer $p(490 < X < 520)$.

Solution : $p(490 < X < 520) \approx 0{,}819$

2. Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures sans être rechargés.

Déterminer la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée.

Solution : La batterie du bateau sera déchargée si son temps de fonctionnement est inférieur ou égal à son temps d'utilisation. On cherche donc $p(X \leqslant 480)$

$p(X \leqslant 480) \approx 0{,}023$.

3. Déterminer l'entier a tel que $p(X < a) \approx 0{,}01$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution : En utilisant la calculatrice on trouve $a \approx 477$.

Donc la probabilité qu'une batterie soit déchargée 3 minutes avant la fin des 8 h d'utilisation est d'environ 0,01.

On peut donc considérer que 1% des batteries cesseront de fonctionner 3 minutes avant la fin de la journée.