∽ Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers ∾
13 juin 2017

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La loi uniforme est définie sur l'intervalle $[1\,;9]$ de longueur 8.
   $p(5 < X < 9) = \dfrac{9-5}{9-1} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ **Réponse b.**
2. L'intervalle de confiance au seuil des 95 % est : $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
   Son amplitude est donc égale à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Celle-ci est égale à $0,01$. Cela donne donc :
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0,01 \iff \dfrac{4}{n} = 0,0001 \iff n = \dfrac{4}{0,0001} = 40\,000$ **Réponse d.**
3. $x^{23} = 92 \iff \ln\left(x^{23}\right) = \ln(92) \iff 23 \times \ln(x) = \ln(92) \iff \ln(x) = \dfrac{\ln(92)}{23}$
   $\iff x = e^{\frac{\ln(92)}{23}}$ **Réponse c.**
4. D'après le tableau de variations, pour tout $x \in [\,-5\ ;\ 3\,]$ (intervalle de longueur 8), on a $2 \leqslant f(x) \leqslant 5$.
   Donc, $8 \times 2 \leqslant \displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8 \times 4$ soit $16 \leqslant I \leqslant 32$. **Réponse c.**

EXERCICE 2 **6 POINTS**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = (-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}.$$

1. **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[-20\ ;\ 20]$,
   $f'(x) = -2 \times \mathrm{e}^{0,2x-3} + (-2x+30) \times 0,2 \times \mathrm{e}^{0,2x-3}$
   $= [-2 + 0,2 \times (-2x+30)]\,\mathrm{e}^{0,2x-3} = (-2 - 0,4x + 6)\,\mathrm{e}^{0,2x-3} = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$.

   b. Pour tout $x \in [-20\ ;\ 20]$, $\mathrm{e}^{0,2x-3} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-0,4x+4$.
   $-0,4x+4 \geqslant 0 \iff -0,4x \geqslant -4 \iff x \leqslant \dfrac{-4}{-0,4} \iff x \leqslant 10$. On obtient donc le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-20\ ;\ 20]$:

x	-20		10		20
$-0,4x+4$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	70e^{-7}	$\nearrow$	$\dfrac{10}{\text{e}}$	$\searrow$	-10e

$f(-20) = 70\text{e}^{-7} \approx 0,064$ $\quad f(10) = \frac{10}{\text{e}} \approx 3,68$ $\quad f(20) = -10\text{e} \approx -27,18.$

2. **a.** Sur l'intervalle $[-20~;~10]$, la fonction f est positive. L'équation $f(x) = -2$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

   Sur l'intervalle $[10~;~20]$, la fonction f est continue strictement décroissante à valeurs dans $\left[\dfrac{10}{\text{e}}~;~-10\text{e}\right]$.

   Or $-2 \in \left[\dfrac{10}{\text{e}}~;~-10\text{e}\right]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $[10~;~20]$.

   Conclusion : l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[10~;~20]$.

   b. Avec la calculatrice, on trouve $\alpha \in]15,8~;~15,9[$.

3. **a.** La ligne 1 nous donne comme dérivée la fonction f. Dons la fonction définie sur l'intervalle $[10~;~15]$ par $F(x) = (-10x+200)\text{e}^{0,2x-3}$ est une primitive de la fonction f.

   Donc $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_{10}^{15}$. $F(15) = 50$ et $F(10) = 100\text{e}^{-1}$.

   Donc $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\text{d}x = 50 - \dfrac{100}{\text{e}}$.

   b. La ligne 3 nous donne la dérivée seconde de la fonction f : $f''(x) = (-0,08x+0,4)\text{e}^{0,2x-3}$.

   Pour tout $x \in [-2~;~20]$, $\text{e}^{0,2x-3} > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $-0,08x+0,4$.

   $-0,08x+4 \geqslant 0 \iff -0,08x \geqslant -4 \iff x \leqslant \dfrac{-0,4}{-0,08} \iff x \leqslant 5$.

   La fonction f est convexe si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe, est : $[-20~;~5]$. L'abscisse du point d'inflexion est $x = 5$.

Partie B

1. $f(10) - f(0) = 10\text{e}^{-1} - 30\text{e}^{-3} \approx 2,185$. Le dénivelé de cette nouvelle piste est donc de 2 185 mètres.

2. Pour déterminer la difficulté de cette piste, il faut étudier les variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $(0~;~10]$.

   D'après les questions précédentes, on a :

   $f'(x) = (-0,4x+4)\text{e}^{0,2x-3}$ et $f''(x) = (-0,08x+0,4)\text{e}^{0,2x-3}$.

   Le signe (déjà trouvé) de $f''(x)$ donne les variations de f'. Le tableau de variations de $f'(x)$ est donc :

x	0		5		20
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	4e^{-3}	$\nearrow$	2e^{-2}	$\searrow$	0

   $f'(0) = 4\text{e}^{-3} \approx 0,199$ $f(5) = 2\text{e}^{-2} \approx 0,271$ $f(10) = 0$.

   D'après le tableau de variation, la fonction f' admet sur l'intervalle $[0~;~10]$ un maximum au point d'abscisse 5. Ce maximum a pour valeur approchée $0,271$. La pente maximum sera donc de 27,1 %, ce qui correspond à une piste rouge.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

1. Au 1[er] janvier 2018, la surface sera égale à : $120 \times 0,90 + 4 = 112 m^2$.

2. Algorithme :

L1	U prend la valeur 120
L2	N prend la valeur 0
L3	Tant que U>60
L4	$\quad U$ prend la valeur $0,9 \times U + 4$
L5	$\quad N$ prend la valeur $N + 1$
L6	Fin tant que
L7	Afficher N

3. a. pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,9u_n + 4 - 40 = 0,9u_n - 36 = 0,9(u_n - 40) = 0,9v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 40 = 80$.

b. pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 80 \times 0,9^n$.

c. Nous savons que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 40$ donc $u_n = v_n + 40 = 80 \times 0,9^n + 40$.

4. a. $80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60 \iff 80 \times 0,9^n \leqslant 20 \iff 0,9^n \leqslant \dfrac{20}{80} \iff 0,9^n \leqslant \dfrac{1}{4}$

$\iff \ln\left(0,9^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) \iff n \times \ln(0,9) \leqslant -\ln(4) \iff n \geqslant \dfrac{-\ln(4)}{\ln(0,9)}$.

Or $\dfrac{-\ln(4)}{\ln(0,9)} \approx 13,16$, donc $n \geqslant 14$.

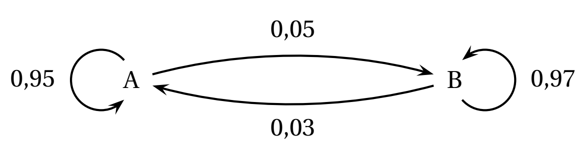
b. Au bout de 14 années, soit à partir de 2021, la surface sera réduite de plus de la moitié.

5. Calculons la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9. Comme $q \in]-1\ ;\ 1[$, la limite de la suite (v_n) est nulle lorsque n tend vers l'infini. De plus $u_n = v_n + 40$ donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini sera égale à 40. Le jardinier n'arrivera jamais à faire disparaître complètement la plante de son terrain car il en restera toujours au minimum $40 m^2$.

EXERCICE 3 5 POINTS

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Le graphe probabiliste :



b. La matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$.

2. $P_1 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

a. Les termes de la matrice de transition M ne sont pas nuls, donc l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ qui se trouve en résolvant le système d'équations suivant :

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,03b & 0,05a + 0,97b \end{pmatrix}$, d'où :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0,95a + 0,03b \\ b & = & 0,05a + 0,97b \end{array}\right.$$

Ces deux équations se simplifient pour obtenir : $0,05a - 0,03b = 0$. De plus $a + b = 1$. Donc le couple $(a\,;\,b)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,05a - 0,03b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array}\right.$$

b. Par substitution :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,05a - 0,03b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,05a - 0,03(1-a)y & = & 0 \\ b & = & 1 - a \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,05a - 0,03 + 0,03a & = & 0 \\ b & = & 1 - a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,08a & = & 0,03 \\ b & = & 1 - a \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \dfrac{0,03}{0,08} = \dfrac{3}{8} \\ b & = & 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8} \end{array}\right.$$

L'état stable du système est $P = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{8} & \dfrac{5}{8} \end{pmatrix}$.

c. Au bout d'un certain temps, le candidat A aura environ $37,5\,\%$ des abonnés, et le candidat B $62,5\,\%$.

4. a. On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

Donc $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times M$.

On obtient alors : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a_n + 0,03b_n & 0,05a_n + 0,97b_n \end{pmatrix}$.

Donc $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03b_n$. De plus $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.

Pour finir : $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03\,(1 - a_n) = 0,95a_n + 0,03 - 0,03a_n = 0,92a_n + 0,03$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = a_{n+1} - 0,375 = 0,92a_n + 0,03 - 0,375 = 0,92a_n - 0,372 = 0,92\,(a_n - 0,375) = 0,92a_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 0,375 = 0,275$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 0,275 \times 0,92^n$ et comme $v_n = a_n - 0,375$ on en déduit que $a_n = 0,275 \times 0,92^n + 0,375$.

5. $a_{11} = 0,275 \times 0,92^{11} + 0,375 \approx 0,485$.

La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, le candidat A aura donc environ $48,5\,\%$ des voix. C'est donc le candidat B qui sera élu avec environ $51,5\,\%$ des suffrages exprimés.

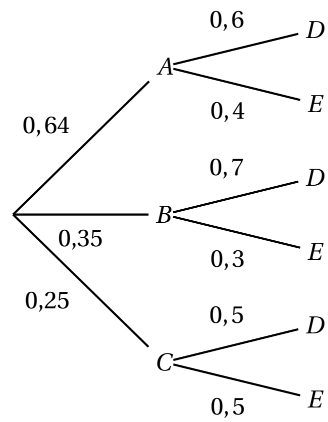
EXERCICE 4 — 5 POINTS

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

1. L'arbre pondéré.



2. Formule de Bayes : $p(A \cap E) = p_A(E) \times p(A) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.
3. Formule des probabilités totales :
   $p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E) =$
   $p_A(E) \times p(A) + p_B(E) \times p(B) + p_C(E) \times p(C) = 0,16 + 0,35 \times 0,3 + 0,25 \times 0,5 = 0,16 + 0,105 + 0,125 = 0,39$.
4. Formule de Bayes : $p_E(C) = \dfrac{p(C \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,125}{0,39} \approx 0,32$.
5. Pour une embarcation, l'espérance du gain sera de :
   $E(X) = p(A \cap D) \times 15 + p(A \cap E) \times 25 + p(B \cap D) \times 10 + p(B \cap E) \times 16 + p(C \cap D) \times 35 + p(C \cap E) \times 60 = 23,605$.
   Donc pour 200 embarcations, $E(X) = 23,605 \times 200 = 4\,721$ euros.

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, $p(490 < X < 520) \approx 0,819$.
2. 8 heures correspond à 480 minutes. On cherche donc $p(X < 480)$.
   Avec la calculatrice $p(X < 480) = 0,5 - p(480 < X < 500) \approx 0,023$.
3. À l'aide de la touche inverse loi normale de la calculatrice, on détermine la valeur de a.
   On trouve $a \approx 476,74$ soit $a = 477$.
   Cela signifie que la probabilité que batterie d'un bateau soit déchargée avant 477 minutes d'utilisation est d'environ 1 %.