Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Questionnaire à choix multiples

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$, d'où par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2+3}\right) = 0$.
2. $\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e} - 4 = 2 + \mathrm{e} - 4 = \mathrm{e} - 2$.
3. Pour $x < 1$, $\ln(1-x) \geqslant 1\mathrm{e}^{\ln(1-x)} \geqslant \mathrm{e}^1 \iff 1 - x \geqslant \mathrm{e} \iff x \leqslant 1 - \mathrm{e}$ et dans ce cas là la condition $x < 1$ est réalisée.
4. Si $F(x) = x\ln(x) + x$, alors :
   $F'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} + 1 = \ln(x) + 1 + 1 = \ln(x) + 2$.

Partie B

5. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - a^2 = (1+a)(1-a)$.
6. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$.
7. $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{2ab}{b^2} = \dfrac{2a}{b}$.

Partie C

Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, la suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Alors,

8. $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n$.
9. $U_n = U_0 \times q^n = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2^{1-n}$.
10. $S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}$;
    $\dfrac{1}{2}S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}$, donc par différence :
    $S - \dfrac{1}{2}S = 2 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{31}{16} = \dfrac{1}{2}S \iff S = \dfrac{31}{8}$.

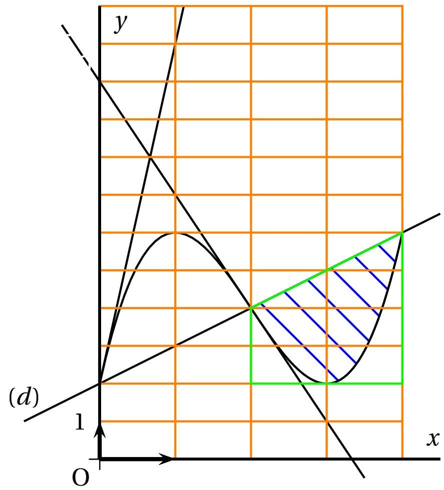
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On lit $f(0) = 2$, $f'(0) = \dfrac{9}{1} = 9$;
   b. $f(1)6$ et $f'(1) = 0$;
   c. $f(2) = 4$ et $f'(2) = \dfrac{-3}{1} = -3$;
   d. $f(x) \leqslant x + 2 \iff 2 \leqslant x \leqslant 4$.
2. **a.** La fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$ et sur $[3 ; 4]$ et décroissante sur $[1 ; 3]$.

b. La fonction f étant positive sur $[0\,;\,4]$, g est définie sur cet intervalle et $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
Comme $f(x) > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$. Les variations de g sont les mêmes que celles de f.

3.



On voit que la surface hachurée contient 1 unité d'aire. Son aire est inférieure au trapèze vert dont l'aire est égale à $\dfrac{(2+4)\times 2}{2} = 6$ L'aire est donc strictement comprise entre 1 et 6.

4. On a $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, d'où $f'(x) = 3mx^2 + 2nx + p$.

a. $f(0) = 2 \Rightarrow q = 2$;
$f'(0) = 9 \Rightarrow p = 9$.

b. $f(1) = 6 \Rightarrow m + n + 9 + 2 = 6 \iff m + n = -5 \iff n = -5 - m$;
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3m + 2n + 9 = 0 \iff 3m + 2n = -9 \Rightarrow 3m + 2(-5 - m) = -9 \iff 3m - 10 - 2m = -9 \iff m = 1$, puis $n = -5 - m = -5 - 1 = -6$.
Donc $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

5. a. On a donc $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$;
$f'(0) = 9$ et $f'(4) = 3\times 16 - 12\times 4 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9$: les coefficients directeurs des tangentes sont égaux donc les tangentes sont parallèles.

b.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

1. Les sommets ont dans l'ordre alphabétique comme degrés : 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 2 ; 3 ; 3.
IL y'a 4 sommets de degré impair, donc plus de deux : il n'existe donc pas de chaîne eulérienne.
2. Il y a deux sommets de degré 5, donc le nombre chromatique c est inférieur ou égal à 6.
Le sous-graphe {A, B, C, D} est complet d'ordre 4 ; donc $c \geqslant 4$.
Finalement : $4 \leqslant c \leqslant 6$.

Partie B

1. On utilise l'algorithme de Dijkstra :

E	A	B	C	D	G	S	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	E
	E 4	E 7	∞	∞	∞	∞	A
		A 6	A 12	A 13	∞	∞	B
			B 11	B 12	∞	∞	C
				B 12	C 15	C 19	D
					C 15	C 19	G
						C 19	S

En remontant les sommets on obtient le chemin le plus rapide : E – A – B – C – S qui dure 19 minutes.

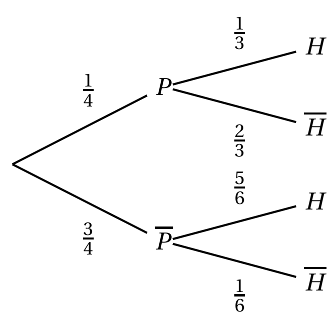
2. **a.** Arrivé en C il ne reste plus que l'itinéraire vers D puis le chemin menant à S : D–S.
Le trajet est donc : E–A–B–C–D–S qui dure 22 minutes.

   b. En supprimant les chemins CG et CS et en refaisant l'algorithme de Dijkstra, on trouve que le chemin le plus rapide est E–A–B–D–S qui prend 20 minutes.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. On a $p(P \cap H) = p(P) \times p_P(H) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.
3. On calcule de même :
$p\left(\overline{P} \cap H\right) = p\left(\overline{P}\right) \times p_{\overline{P}}(H) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{8}$.
Donc $p(H) = p(P \cap H) + p\left(\overline{P} \cap H\right) = \frac{1}{12} + \frac{5}{8} = \frac{2+15}{24} = \frac{17}{24}$.
4. Il faut trouver :
$p_H(P) = \dfrac{p(P \cap H)}{p(H)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{17}{24}} = \frac{1}{12} \times \frac{24}{17} = \frac{2}{17}$.
5. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = p(H) = \frac{17}{24}$.
La probabilité que Monsieur X ne soit jamais à l'heure est : $\left(1 - \frac{17}{24}\right)^4 = \left(\frac{7}{24}\right)^4$, donc la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois est égale à :
$1 - \left(\frac{7}{24}\right)^4 \approx 0{,}992\,7$ soit 0,993 au millième près

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par :
$f(x) = 2x^2 + x\mathrm{e}^{-2x+3}$; elle est dérivable et sur $[0\,;\,5]$:
$f'(x) = 2\times 2x + \mathrm{e}^{-2x+3} + x\times(-2)\mathrm{e}^{-2x+3} = 4x + \mathrm{e}^{-2x+3}(1-2x) = C(x)$.
De plus $f(0) = 0$.
Conclusion f c'est-à-dire C_T définie sur $[0\,;\,5]$ par $C_T(x) = 2x^2 + x\mathrm{e}^{-2x+3}$ est la primitive de C qui s'annule en zéro.

2. $$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{2x^2 + x\mathrm{e}^{-2x+3}}{x} = 2x + \mathrm{e}^{-2x+3}.$$

3. **a.** La fonction C_M est dérivable sur $[0\,;\,5]$ et sur cet intervalle :
$C'_M(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{-2x+3} = 2\left(1-\mathrm{e}^{-2x+3}\right)$.
b. $1-\mathrm{e}^{-2x+3} = 0 \iff 1 = \mathrm{e}^{-2x+3} \iff 0 = -2x+3$ (en prenant le logarithme népérien) $\iff$ $2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{2}$. L'équation a une solution : $\dfrac{3}{2}$.
c. $1-\mathrm{e}^{-2x+3} > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^{-2x+3} \iff 0 > -2x+3 \iff 2x > 3 \iff x > \dfrac{3}{2}$.
d. Comme $2 > 0$, le signe de $C'_M(x)$ est celui de la différence $1-\mathrm{e}^{-2x+3}$.
Donc $1-\mathrm{e}^{-2x+3} > 0 \iff x > \dfrac{3}{2}$: la dérivée est positive, donc C_M est croissante sur l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2}\,;\,5\right]$.
On a de même : C_M est décroissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$.

4. On a vu dans la question précédente que la fonction C_M a un minimum en $x = \dfrac{3}{2}$, égal à $C_M\left(\frac{3}{2}\right) = 2\times\dfrac{3}{2} + \mathrm{e}^{-2\times\frac{3}{2}+3} = 3+1 = 4$.
Donc pour une production de 1,5 centaine soit 150 objets, le coût moyen par objet est de 4 milliers d'euros soit 4 000 €.

5. **a.** — Soit $M(x\,;\,C_T(x))$.
Comme $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$, ce coût moyen sera minimal quand la pente de la droite (OM) sera la plus petite ; ce point M_m sera obtenu en traçant la tangente menée par O à la courbe représentative de la fonction C_T. On trouve que $M_m(1,5\,;\,6)$.
— Il y a bénéfice quand la recette est supérieure au coût total. On voit que ceci est réalisé quand $0,6 < x3,5$ (valeurs approximatives).
— On regarde le prix de vente et le coût marginal. Si le prix de vente est supérieur au coût marginal, on peut produire davantage pour gagner davantage et inversement.
On aura donc un bénéfice maximum quand le coût marginal est égal au prix de vente. Mais ce coût marginal est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative du coût total. Il faut donc un point de la courbe où la tangente est parallèle à la recette. On voit que ce point a pour abscisse 2. le bénéfice estampilla quand on produit 200 objets.
b. On a sur $]0\,;\,5]$:
$B(x) = R_T(x) - C_T(x) = 7x - 2x^2 - x\mathrm{e}^{-2x+3}$. La calculatrice donne :
$B(0,6) \approx -0,15$ et $B(0,7) \approx 0,45$; puis
$B(0,62) \approx -0,03$ et $B(0,63) \approx 0,03$ et

Pour l'autre borne on obtient :
$B(3,4) \approx 0,6$ et $B(3,5) \approx -0,06$; puis
$B(3,49) \approx 0,005$ et $B(3,50) \approx -0,06$.
Conclusion : il y a bénéfice pour une production allant de 63 à 349 articles.

Annexe 2 **à rendre avec la copie**

Exercice 4 : commun à tous les candidats