Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers [1] 13 juin 2019

Exercice I — 5 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante. Les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

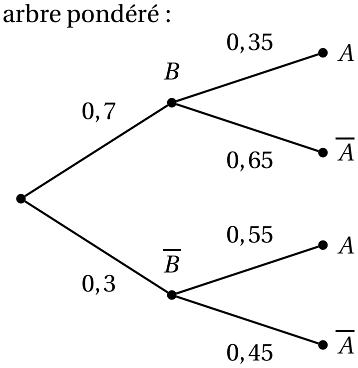
On s'intéresse à la clientèle d'un musée.
Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.
Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- 70 % des clients achètent leur billet sur internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :

- A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;
- B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1. Traduction de l'énoncé : $p(B) = 0,7$; $p_B(A) = 0,35$; $p_{\overline{B}}(A) = 0,55$.
   On traduit la situation par un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $p(A) = p_B(A) \times p(B) + p_{\overline{B}}(A) \times p\left(\overline{B}\right) = 0,35 \times 0,7 + 0,55 \times 0,3 = 0,245 + 0,165 = 0,41$.
   $\boxed{p(A) = 0,41}$.
3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.
   Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur Internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site Internet du musée.
   $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,245}{0,41} \approx \boxed{0,598 > 0,5}$.
   Puisque plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur Internet, le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site Internet du musée.

1. Pondichéry

Partie B

On s'intéresse désormais à la fréquentation de la boutique du musée.
On note T la variable aléatoire qui, à chaque visiteur, associe la durée en minutes passée dans la boutique.
Une étude statistique a montré que la variable aléatoire T suit la loi normale de moyenne $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. $P(T \leqslant 6) = P(T \leqslant \mu - 2\sigma)$.
   D'après le cours, $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$, donc $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu) \approx \dfrac{0,954}{2}$.
   Or $P(T \leqslant \mu) = 0,5$, donc $P(T \leqslant \mu - 2\sigma) = P(T \leqslant \mu) - p(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu) \approx 0,5 - \dfrac{0,954}{2} = \boxed{0,023}$.
   La probabilité qu'un visiteur reste moins de six minutes dans la boutique est environ égale à 0,023.
2. $P(6 \leqslant T \leqslant 14) = P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx \boxed{0,954}$.
3. $P(T \geqslant a) = 0,25 \iff P(T \leqslant a) = 0,25$.
   À la calculatrice, on trouve $\boxed{a \approx 11,3}$.
   La probabilité que le temps d'attente soit supérieur ou égal à 11,3 minutes est de 0,25.
4. Les recettes obtenues par la boutique ne sont pas jugées satisfaisantes; celle-ci est donc réaménagée. Une étude menée suite à ce réaménagement montre que 25 % des visiteurs passent désormais au moins 15 minutes dans la boutique.
   Pour s'en assurer le gérant de la boutique constitue un échantillon aléatoire de 720 visiteurs. Il constate que 161 d'entre eux sont restés 15 minutes ou plus.
   On a un échantillon de taille $n = 720$. La proportion théorique que les gens passent plus de 15 minutes dans la boutique est $p = 0,25$.
   On a $\begin{cases} n = 720 \geqslant 30 \\ np = 720 \times 0,25 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 720 \times 0,75 \geqslant 5 \end{cases}$.
   On peut alors étudier l'intervalle de fluctuation au seuil 0,95.
   $$I = \left[p - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$
   On trouve $\boxed{I = [0,218\ ;\ 0,282]}$.
   La fréquence observée est $f = \dfrac{161}{720} \approx 0,224 \in I$.
   Le résultat observé ne remet pas en cause l'hypothèse (au seuil 0,95).

Exercice II — 4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Reporter sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*
Aucune justification n'est demandée.

Un constructeur automobile commercialise un nouveau véhicule. Afin de le faire connaître, une campagne publicitaire est organisée. On étudie l'impact de cette campagne publicitaire dans une certaine région.

1. On montre la publicité à 3 000 habitants de cette région. Parmi eux, 817 la trouvent attractive. Un intervalle de confiance au seuil de 0,95 de la proportion d'habitants de la région trouvant que la publicité est attractive est (les bornes ont été arrondies à 10^{-3}) :

La fréquence observée est $f = \dfrac{817}{3\,000} \approx 0,2723$.

On a : $\left\{\begin{array}{l} n = 3000 \geqslant 30 \\ nf = 3\,000 \times \dfrac{817}{3\,000} = 817 \geqslant 5 \\ n(1-f) = 3000 \times \dfrac{2\,183}{3\,000} = 2\,183 \geqslant 5 \end{array}\right.$.

On peut alors considérer l'intervalle de confiance au seuil 0,95 :

$I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\dfrac{317}{3\,000} - \dfrac{1}{\sqrt{3\,000}}\ ;\ \dfrac{317}{3\,000} + \dfrac{1}{\sqrt{3\,000}}\right] \approx \boxed{[0,254\ ;\ 0,291]}$ (réponse D.)

2. Dans une ville de la région, sur une population de 4 200 habitants, 36 % ont pris connaissance de la publicité lors de la première semaine de la campagne. Le nombre d'habitants de cette ville ayant pris connaissance de la publicité lors de la première semaine de la campagne est :

$36\,\% \times 4\,200 = \boxed{1\,512}$ (réponse B.)

3. Le premier jour de la campagne publicitaire, 150 habitants de la région ont pris connaissance de la publicité. Chaque jour, le nombre d'habitants de la région ayant pris connaissance de la publicité est multiplié par 2.

On souhaite écrire un algorithme qui détermine le nombre de jours au bout desquels au moins 30 000 habitants de la région auront pris connaissance de la publicité.

Parmi ces algorithmes, quel est celui dont le contenu de la variable N, après exécution de l'algorithme, répond au problème ?

A.	**B.**

$A \leftarrow 150$
$N \leftarrow 1$
Tant que $A < 30000$
    $A \leftarrow 2A$
Fin Tant que
$N \leftarrow N+1$
	$A \leftarrow 150$
	$N \leftarrow 1$
	Tant que $A < 30000$
	    $A \leftarrow 2A$
	    $N \leftarrow N+1$
	Fin Tant que

C.	**D.**

$A \leftarrow 150$
$N \leftarrow 1$
Tant que $A < 30000$
    $A \leftarrow 2A$
Fin Tant que
	$A \leftarrow 150$
	$N \leftarrow 1$
	Tant que $A > 30000$
	    $A \leftarrow 2A$
	    $N \leftarrow N+1$
	Fin Tant que

Réponse : **c'est l'algorithme B**

4. Dans une concession automobile de la région, le temps d'attente, exprimé en minutes, avant d'être reçu par un conseiller commercial peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [1 ; 10].

Notons T le temps d'attente. T suit la loi uniforme sur l'intervalle [1 ; 9].

La probabilité qu'il attende au moins 5 minutes avant d'être reçu par un conseiller commercial est $p(T \geqslant 5) = p(5 \leqslant T \leqslant 10) = \dfrac{10-5}{9-1} = \boxed{\dfrac{5}{9}}$

Exercice III 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L.

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque hiver de 20 % de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.
On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1[er] juillet de l'année $(2018+n)$.
Au 1[er] juillet 2018, le loueur possède 150 vélos, ainsi $u_0 = 150$.

1. **a.** $150 \times (1-20\,\%)+35 = 150 \times 0,8+35 = \boxed{155}$.
Le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1[er] juillet 2019 est 155.
b. Pour tout n, $u_{n+1} = (1-20\,\%)\,u_n + 35 = \boxed{0,8u_n+35}$.
2. On a calculé les premiers termes de cette suite à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous :

	A	B
1	rang n	terme u_n
2	0	150
3	1	155
4	2	159
5	3	162,2

a. Dans la cellule B3, il faut taper $\boxed{\text{=0,8*B2+35}}$
b. Pour les termes de rang 36, 37, 38, 39 et 40, on obtient les résultats suivants (arrondis au millième) :

38	36	174,992
39	37	174,994
40	38	174,995
41	39	174,996
42	40	174,997

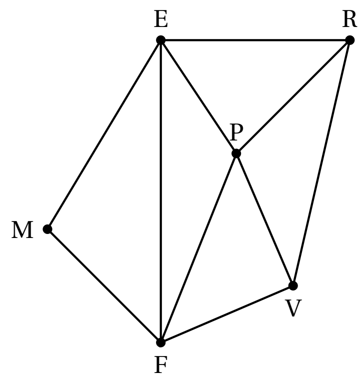
On peut conjecturer que la limite d cela suite est 175.

3. *Dans cette question, on cherche à démontrer la conjecture émise à la question précédente.*
Pour cela, on pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 175$.
a. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 175 = 0,8u_n + 35 - 175 = 0,8u_n - 140 = 0,8\,(u_n - 175) = \boxed{0,8v_n}$.
On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$.
Le premier terme est $v_0 = u_0 - 175 = 150 - 175 = -25$; $\boxed{v_0 = -25}$.
b. Pour tout n, on a alors $v_n = v_0 q^n = -25 \times 0,8^n$.
Comme $v_n = u_n - 175$, on a $u_n = 175 + v_n = 175 - 25 \times 0,8^n$; $\boxed{u_n = 175 - 25 \times 0,8^n}$.
c. $-1 < 0,8 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 175}$.
4. On admet que la suite (u_n) est croissante.
$u_n \geqslant 170 \iff 175 - 25 \times 0,8^n \geqslant 170 \iff 5 \leqslant 25 \times 0,8^n \iff \dfrac{1}{5} \leqslant 0,8^n \iff \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \leqslant n\ln(0,8)$
(car la fonction ln est croissante) d'où $n \geqslant \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} \approx 7,21$ (l'inégalité change de sens, car on divise par un nombre négatif).
Par conséquent, on doit avoir $\boxed{n \geqslant 8}$.
En 2026, le nombre de vélos va dépasser 170.

Exercice IV **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un restaurateur se fournit auprès de 5 producteurs locaux. Le graphe ci-dessous représente la situation géographique du restaurateur et de ses fournisseurs, les arêtes correspondant au réseau routier et les sommets aux producteurs :



Légende :
E : éleveur
F : fromager
M : maraîcher
P : pisciculteur
R : **restaurateur**
V : vigneron

1. **a.** Le graphe n'est pas complet puisque M et P ne sont pas adjacents (non reliés par une arête).

   b. Le graphe est connexe puisque tous les sommets sont reliés par une chaîne, par exemple M-F-V-R-P-E.

2. Relevons les degrés des sommets :

Sommet	E	F	M	P	R	V
Degré	4	4	2	4	3	3

   Deux sommets sont de degré impair ; le graphe contient donc une chaîne eulérienne.
   Le restaurateur peut organiser une visite de tous ses producteurs en partant de son restaurant et en empruntant une fois et une seule chaque route, en arrivant au vigneron.
   Exemple : le chemin R-E-M-F-E-P-R-V-P-F-V.

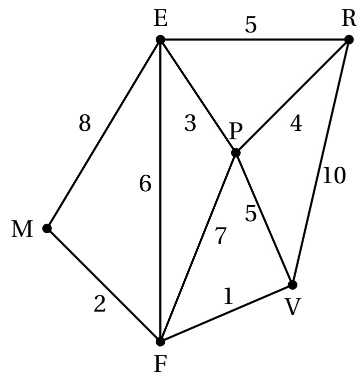
3. On appelle N la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

   a. On a : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   b. On donne la matrice $N^3 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 & 10 & 9 & 5 \\ 10 & 6 & 6 & 10 & 5 & 9 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 5 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 5 & 9 & 4 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

   Le nombre de la première ligne et sixième colonne est 5, donc il y a 5 chemins de longueur 3 allant de l'éleveur au vigneron

4. Les arêtes du graphe sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètre, entre les différents lieux :



On cherche le plus court chemin allant de R à M. Pour cela, on utilise l'algorithme de Djikstra.

de ...à ...	E	P	V	F	M
R	5R	4R	10R	∞	∞
P4	5R		9P	11P	∞
E5			9P	11P	13E
V9				10V	13E
F10					12F

Le chemin le plus court pour aller de R à M est donc de longueur 12 : R-P-V-F-M

Exercice V — 6 points

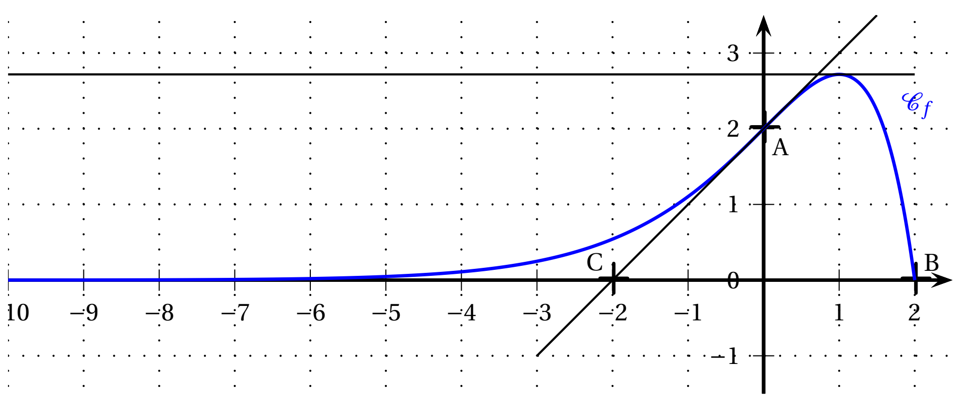
Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$. On a placé les points A(0; 2), B(2; 0) et C(−2 ; 0).

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. $\boxed{f(0) = 2}$ et $\boxed{f(2) = 0}$.

2. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en 1 : $\boxed{f'(1)=0}$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses)
3. Équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A :
   Il faut connaitre $f'(0)$; $f'(0)=\dfrac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\dfrac{2-0}{0-(-2)}=1$ donc $f'(0)=1$.
   Alors : $y=f'(0)(x-0)=f(0) \iff y=1x+2$ donc $\boxed{y=x+2}$
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite d'équation $y=1$ en deux points. L'équation $f(x)=1$ dans l'intervalle $[-10\,;\,2]$ semble donc avoir deux solutions $x_1\approx-1,1$ et $x_2\approx1,8$.
5. f semble croissante sur [-10; 1] et décroissante sur [1; 2].
6. On regarde la position de la courbe par rapport à ses tangentes.
   f semble convexe sur [-10; 0] et concave sur [0; 2].
7. On s'intéresse au nombre $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. I correspond à l'aire **hachurée** dans la courbe représentée en annexe.
   b. En comptant le nombre de carreaux, il semble que $\boxed{4\leqslant I\leqslant 5}$.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.
On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ par :

$$f(x)=(2-x)\mathrm{e}^x.$$

.

1. $f(0)=2\mathrm{e}^0=2$ donc $\boxed{f(0)=2}$
   $\boxed{f(2)=0}$.

   a. $f=uv$ avec $\begin{cases}u(x)=2-x\\ v(x)=\mathrm{e}^x\end{cases}$.
   $f'=u'v+uv'$ avec $u'(x)=-1$śś$v'(x)=\mathrm{e}^x$.
   On en déduit : $f'(x)=-\mathrm{e}^x+(2-x)\mathrm{e}^x=\boxed{(1-x)\mathrm{e}^x}$.

   b. On en déduit que $\boxed{f'(1)=0}$.
2. $f'(0)=1$ et $f(0)=2$ donc une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est
   $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $y=1x+2$ d'où $\boxed{y=x+2}$.
3. **a.** Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de $f'(x)$.
   Quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.
   $f'(x)>0 \iff x<1$ et $f'(x)<0 \iff x>1$.
   Le tableau de variation de f est :

x	-10		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$12\mathrm{e}^{-10}\approx0,005$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

b. Sur [-10 ; 0], f est continue, $f(-10) < 1$ et $f(0) = 2 > 1$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ a une solution dans cet intervalle ; celle-ci est unique car f est croissante sur cet intervalle. On la note α.

Sur [0 ; 2], f est continue, $f(0) > 1$ et $f(2) = 0 < 1$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ a une solution dans cet intervalle ; celle-ci est unique car f est décroissante sur cet intervalle. On a note β.

À la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx -1,15}$ et $\boxed{\beta \approx 1,84}$

4. Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant :

1	$f(x) := (2-x)*\exp(x)$
	$f(x) := (-x+2)\mathrm{e}^x$
2	Simplifier(Dérivée(Dérivée($f(x)$)))
	$-x\mathrm{e}^x$

D'après le résultats donné par ce logiciel, on a $f''(x) = -x\mathrm{e}^x$ qui est positif sur [-10 ; 0] et négatif sur [0 ; 2].

f est donc convexe sur [-10 ; 0] et concave sur [0 ; 2].

5. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$ par :

$$F(x) = (3-x)\mathrm{e}^x.$$

a. $F'(x) = (-1)\times \mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = (2-x)\mathrm{e}^x = f(x)$.

$F' = f$ donc F est bien une primitive de f sur $[-10 ; 2]$.

b. $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \mathrm{e}^2 - 3$; $\boxed{I = \mathrm{e}^2 - 3}$

Feuille annexe à rendre avec la copie

Exercice IV