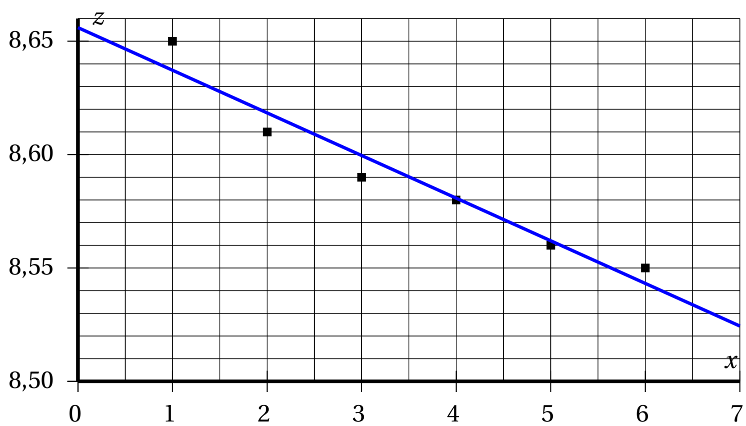
Corrigé du baccalauréat ES La Réunion juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution de la vente de pots de plantes vertes en milliers de pots en France, de 1999 à 2004.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de pots de plantes (en milliers de pots)	5 702	5 490	5 400	5 319	5 200	5 180



1. On pose $z_i = \ln y_i$.
   a. Voir l'annexe.
   b. Voir ci-dessus.
2. **a.** La calculatrice livre $z = 8,66 - 0,02x$.
   b. Voir ci-dessus.
   c. On a $z = \ln y = 8,66 - 0,02x \iff y = \mathrm{e}^{8,66-0,02x} = \mathrm{e}^{8,66} \times \mathrm{e}^{-0,02x}$.
   Or $\mathrm{e}^{8,66} \approx 5745$. Donc $z \approx 5768\mathrm{e}^{-0,02x}$.
3. **a.** 2006 correspond à $x = 8$, d'où $y = \approx 5768\mathrm{e}^{-0,02\times 8} \approx 4915$ (en milliers de pots vendus).
   b. La différence est de $5085 - 4915 = 170$.
   La différence en pourcentage est donc de : $\dfrac{170}{4915} \times 100 \approx 3,46$ %.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_1 & = & 12 & \text{et} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}u_n + 5 & \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{array}\right.$$

1. Voir la construction sur l'annexe.
   La suite semble décroître vers 7,5.
2. **a.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{15}{2} = \dfrac{1}{3}u_n + 5 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{3}\left(u_n - \dfrac{15}{2}\right) = \dfrac{1}{3}v_n$.
   Cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ de premier terme $v_1 = u_1 - \dfrac{15}{2} = 12 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{9}{2}$.

b. On sait qu'alors $v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c. On sait puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et par suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \frac{15}{2} = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{15}{2}$.

3. a. $u_n - \frac{15}{2} \leqslant 10^{-6} \iff v_n \leqslant 10^{-6} \iff \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-6} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant \frac{2}{9} \times 10^{-6} \iff n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant \ln\left[\frac{2}{9} \times 10^{-6}\right] \iff n \geqslant \frac{\ln\left[\frac{2}{9} \times 10^{-6}\right]}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$.

Or $\frac{\ln\left[\frac{2}{9} \times 10^{-6}\right]}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 13,9$.

Donc u_{14} approche 7,5 à moins d'un millionième.

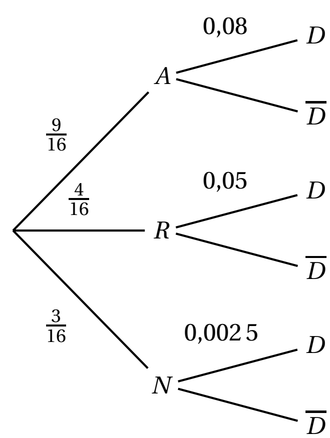
b. Le premier terme est égal à 12 et la suite est décroissante, donc u_n ne peut approcher 10^6 quel que soit le naturel n.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1.



2. On a $p(R \cap D) = p(R) \times p_R(D) = \frac{4}{16} \times 0,05 = 0,0125$ à 10^{-4} près.

3. On a de même :

$p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = \frac{9}{16} \times 0,08 = 0,045$.

$p(N \cap D) = p(N) \times p_N(D) = \frac{3}{16} \times 0,025 \approx 0,000468$, soit $\approx 0,0005$ à 10^{-4} près.

D'après la formule des probabilités totales :

$p(D) = p(R \cap D) + p(A \cap D) + p(N \cap D) \approx 0,05796$ soit $0,0580$ à 10^{-4} près.

4. Il faut calculer $p_{\overline{D}}(N) = \frac{p(\overline{D} \cap N}{p(\overline{D})} = \frac{\frac{3}{16} \times 0,9975}{1 - 0,0005} \approx 0,1985$ à 10^{-4} près.

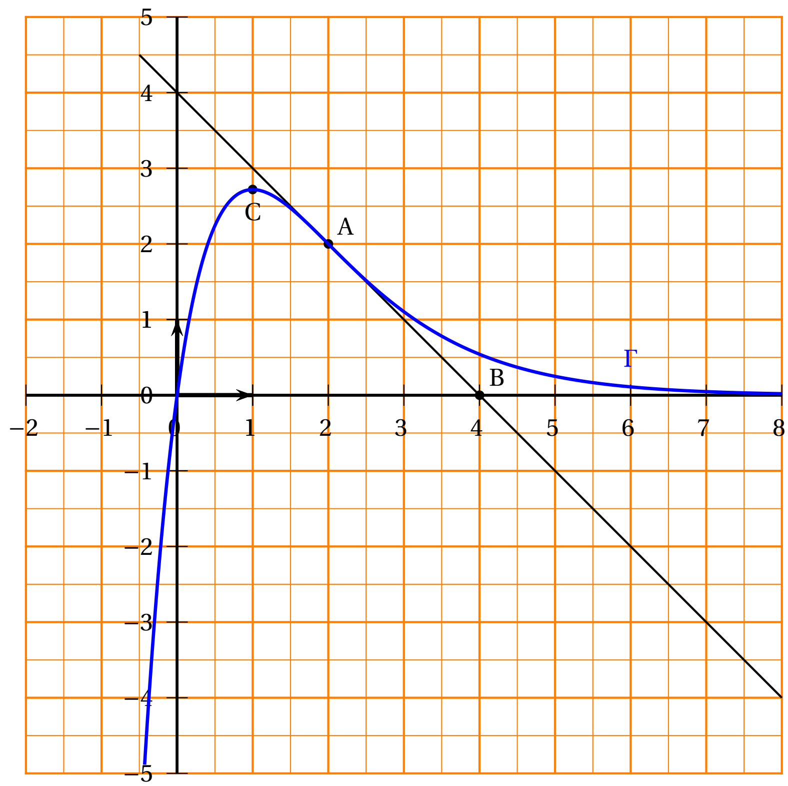
Partie B

1. La probabilité que les trois camions « neufs » soient indisponibles est égale à $(0,01)^3 = 0,000001 \approx 0$ à 10^{-3} près.

2. La probabilité que les trois camions « neufs » soient disponibles est égale à $(0,99)^3$.
   Donc la probabilité que un camion « neuf » au moins soit indisponible est égale à $1-(0,99)^3 \approx 0,030$.
3. Chacun des trois camions peut être indisponibles, les deux autres étant disponibles.
   La probabilité cherchée est donc égale à $3\times(0,99)^2\times 0,01 = 0,029\,403$, soit 0,029 au millième près.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats



1. On lit (et on sait que) $g(0)=0$, $g(2)=2$, $g'(1)=0$, $g'(2)=-1$ car le coefficient directeur de la tangente est celui de la droite (AB).
2. La fonction g est croissante pour $x \leqslant 1$, donc sa dérivée est positive sur cet intervalle ; la seule vérifiant ce critère est la courbe 2.
   La fonction g est négative pour $x \leqslant 0$, puis croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc toutes ses primitives sont décroissantes pour $x \leqslant 0$, puis croissante.
   La seule fonction vérifiant ce critère est celle qui est représentée par la courbe 1.
3. On suppose que la fonction g est de la forme : $g(x)=(x+a)\mathrm{e}^{bx+c}$ où a, b et c sont des nombres réels.
   a. On a $g(0)=0$, $g(2)=2$ et $g'(1)=0$.
   Or $g'(x)=\mathrm{e}^{bx+c}+b(x+a)\mathrm{e}^{bx+c}$. Ces trois conditions se traduisent par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\mathrm{e}^{c}\\2&=&(2+a)\mathrm{e}^{2b+c}\\0&=&(1+b+a)\mathrm{e}^{b+c}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\2&=&2\mathrm{e}^{2b+c}\\0&=&(1+b)\mathrm{e}^{b+c}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\1&=&\mathrm{e}^{2b+c}\\0&=&1+b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\0&=&2b+c\\-1&=&b\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\2&=&c\\-1&=&b\end{array}\right.$$

b.

c. On a donc $g(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}$.

4. On a $G'(x) = -\mathrm{e}^{-x+2} + (x+1)\mathrm{e}^{-x+2} = \mathrm{e}^{-x+2}(-1+x+1) = x\mathrm{e}^{-x+2} = g(x)$.
Ceci montre que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
5. g étant positive sur l'intervalle $[2\,;\,3]$, on sait que l'aire $\mathcal{K}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_2^3 = G(3) - G(2) = -(3+1)\mathrm{e}^{2-3} + (2+1)\mathrm{e}^{2-2} = 3 - 4\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}5$ unité d'aire ce que l'on peut voir sur le graphique.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un Q.C.M. (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte. On portera la réponse dans le tableau prévu en annexe (Annexe 1).
Barème : une bonne réponse rapporte $0{,}5$ *point ; une mauvaise réponse enlève* $0{,}25$ *point. L'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève de point. Si le total de point est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

1. $f(x) = x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) + 1 = x + x\mathrm{e}^{-x} + 1 = \ln \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-x}\left(x + x\mathrm{e}^{x}\right)$: réponse a.
2. $u(-1) = 2 et$g(2) = - 1, $donc$g[u(- 1)] = - 1 : réponse a.
3. Réponse c. car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g[u(x)] = +\infty$.
4. Réponse b. : sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ la fonction g continue strictement croissante est supérieure à -1 prend une seule fois la valeur 3
5. C'est la réponse c.
6. On a $g'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2+1}$: réponse b.
7. On a $F'(x) = f(x) et on sait que sur [3\ ;\ 5]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \mathrm{e}$, donc f est positive sur $[3\,;\,5]$: la fonction F est donc croissante sur cet intervalle : réponse c.
8. Les réponses b. et c. sont bien entendu fausses et $f(x) - (x+1) = \dfrac{5}{x-4}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = 0$, donc la droite dont une équation est $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.
9. Réponse b. (cours)
10. La réponse a. est fausse (cours), la réponse c. aussi.
Réponse b.

ANNEXE 1 à rendre avec la copie

Exercice 1 (question 1. a.)

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre (en milliers) y_i de pots de plantes	5 702	5 490	5 400	5 319	5 200	5 180
$z_i = \ln y_i$	8,65	8,61	8,59	8,58	8,56	8,55

Exercice 4

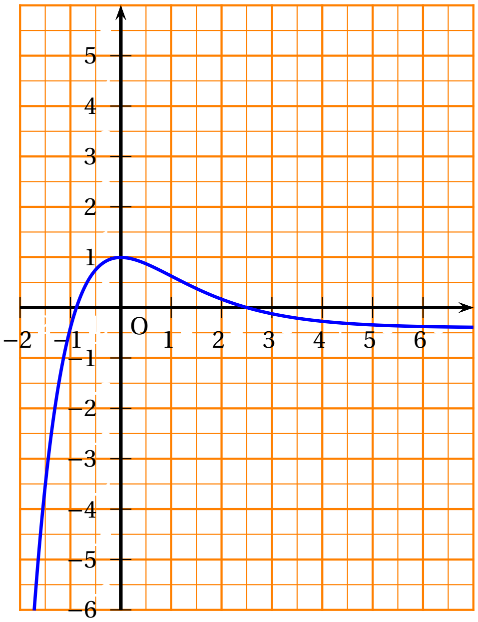
Pour chaque question du Q.C.M., cocher la case correspondant à la bonne réponse

Questions	Réponse a.	Réponse b.	Réponse c.
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

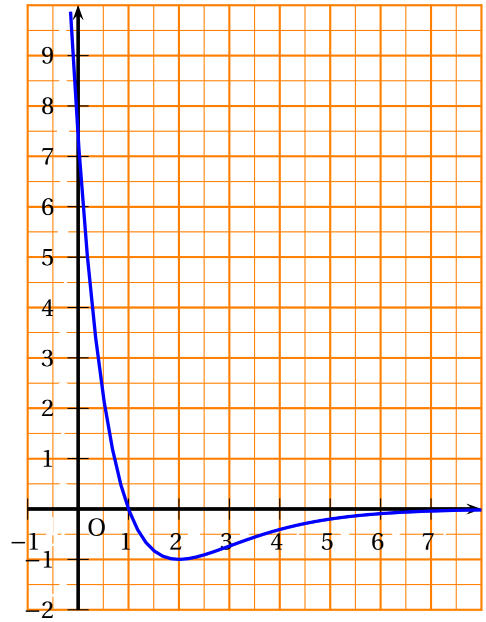
ANNEXE 2 : cette feuille n'est pas à rendre avec la copie

Courbes de l'exercice 3 - question 1

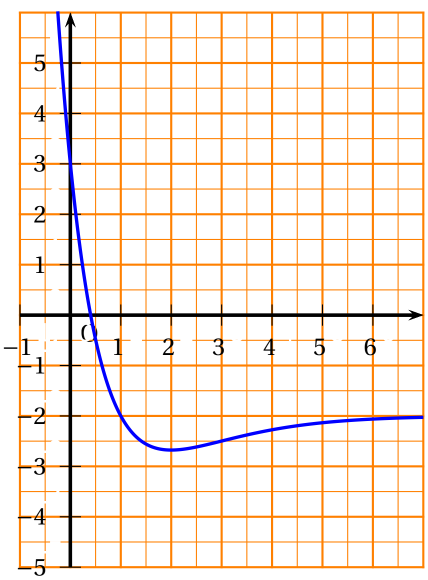
Courbe 1



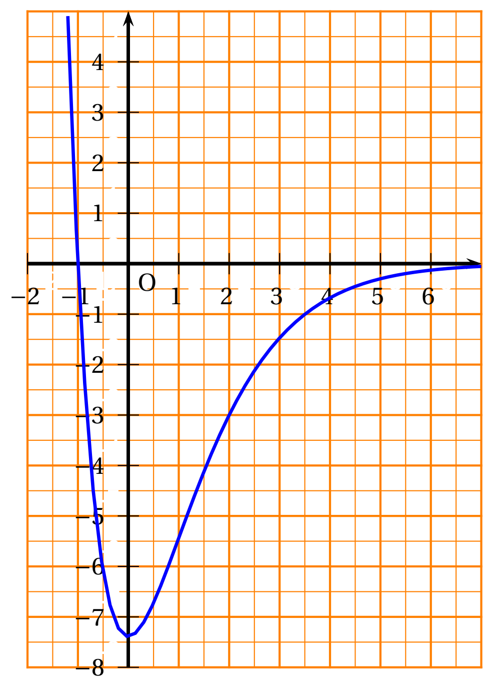
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



ANNEXE 3 : Exercice 2 - Spécialité

À rendre avec la copie