∽ Corrigé du baccalauréat ES La Réunion juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 ; ce coefficient semble être égal à $\dfrac{1}{1} = 1$.
2. **a.** Sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ la figure montre que $f(x) \geqslant 0$; donc l'aire de la surface limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On peut compter les petites rectangles d'aire $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$ unité d'aire. il semble en contenir 71, donc l'aire est d'environ $71 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{71}{16} \approx 4,4$ unité d'aire donc entre 4 et 5.
   b. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ est égale à :
   $\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   D'après la question précédente cette valeur moyenne est donc comprise entre 2 et 2,5.
   Sur le graphique l'aire de la surface hachurée est à peu près égale à l'aire du rectangle bleu.

Partie B

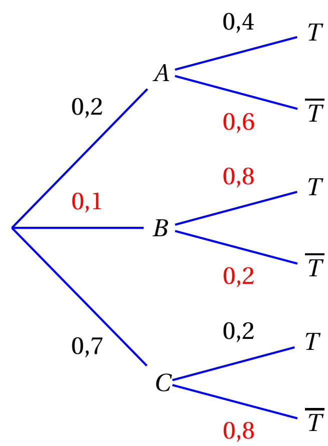
1. **a.** On a pour tout réel de [-5 ; 2],
   $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1+2-x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.
   b. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$:
   - $1-x > 0 \iff 1 > x$, alors $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $]-5\,;\,1]$;
   - $1-x < 0 \iff 1 < x$, alors $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $]1\,;\,2]$;
   - $1-x = 0 \iff 1 = x$, alors $f'(1) = 0$; $f(1)$ est le maximum de f sur $[-5\,;\,2]$ et

   $f(1) = (2-1)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
2. Une équation de (T) est :
   $y - f(0) = f'(0)(x-0)$; or $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$; une équation de (T) est donc :
   $y - 2 = 1(x-0) \iff y = x+2$.
3. **a.** g est dérivable sur $[-5\,;\,2]$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = -\mathrm{e}^x + (x-3)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1+3-x) = (2-x)\mathrm{e}^x = f(x)$; donc g est une primitive de f sur $[-5\,;\,2]$.
   b. D'après la partie A, la valeur moyenne m est égale à :
   $m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}[g(x)]_0^2 = \dfrac{1}{2}[g(2)-g(0)] = \dfrac{1}{2}\left((3-2)\mathrm{e}^2 - (3-0)\mathrm{e}^0\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 3\right) \approx 2,195$
   valeur compatible avec la partie A.

EXERCICE 2 **5 points**

Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie A



1. $p_A(T) = 0,4$ (énoncé).
2. Calculer :
   a. On a $p(B) = 1 - p(A) - p(C) = 1 - 0,2 - 0,7 = 0,1$.
   b. $p_A\left(\overline{T}\right) = 1 - p_A(T) = 1 - 0,4 = 0,6$.
   c. $p(A \cap T) = p(A) \times p_A(T) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.
3. a. $p_T(A) = \dfrac{p(T \cap A)}{p(T)} = \dfrac{p(A \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,08}{0,3} = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$.
   b. $p_B(T) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(B)}$.
   Or d'après la loi des probabilités totales :
   $p(T) = p(A \cap T) + p(B \cap T) + p(C \cap T) \iff p(B \cap T) =$
   $p(T) - p(A \cap T) - p(C \cap T) = 0,3 - 0,08 - 0,7 \times 0,2 = 0,22 - 0,14 = 0,08$.
   Donc $p_B(T) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(B)} = \dfrac{0,08}{0,1} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

Partie B

1. On peut établir un tableau à double entrée avec les deux chiffres présents sur le domino :

chiffre 1 \ chiffre 2	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2			4	5	6	7	8
3				6	7	8	9
4					8	9	10
5						10	11
6							12

Le tableau de la loi de probabilité est donc :

gain	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Le taux d'évolution du nombre d'habitants de cette ville de 2002 à 2006 est : $\dfrac{139\,860-157\,500}{157\,500}\times 100=-11,2\,\%$.
2. On multiplie d'abord par 1,15 puis par 0,85 soit finalement par $1,15\times 0,85=0{,}977\,5$ soit une baisse de 2,25 %.
3. Le chiffre d'affaires sera multiplié par $1,032^{10}\approx 1,370$ soit une augmentation de 37 %.
4. On a pour tout naturel n, $u_n=\mathrm{e}^{-n\ln 2}=\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^{-n}=2^{-n}=\dfrac{1}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$
5. **a.** : 1,8 **b.** : 6,1 **c.** : 445

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. La suite (u_n) n'est pas monotone :
$u_8=3,4\quad u_9=5\quad u_{10}=13\quad u_{11}=-11\quad u_2=-3$.
2. Pour tout naturel n, $u_{n+1}-u_n=-0,1u_n \iff u_{n+1}=0,9u_n$: la suite (u_n) est géométrique de raison 0, 9.
3. Les points $M(x\ ;\ y\ ;\ ;z)$ communs au plan et à la droite ont des coordonnées qui vérifient le système :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z-2 & = & 0\\ y & = & 1\\ z & = & 1-x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+1+1-x-2 & = & 0\\ y & = & 1\\ z & = & 1-x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1\\ z & = & 1-x\end{array}\right.$$
Autrement les points communs au plan et à la droite sont les points de la droite : la droit(D) est donc incluse dans le plan (P).
4. Les sommets ont respectivement pour degrés : 2 ; 3 ; 3 ; 2 et 2.
La somme des degrés étant égale à 12, le nombre d'arêtes est égal à 6.
Ce graphe n'est pas complet : pas d'arête entre A et B.
Le graphe est connexe, a deux sommets de degré impact il existe donc une chaîne eulérienne partant de B et arrivant en C (ou inversement).
5. Chaque semaine le nombre d'exemplaires vendus est multiplié par 1,02. Les nombres d'exemplaires vendus au cours des 45 premières semaines sont les 45 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 10 000 et de raison 1,02.
Ce total est donc égal à :
$$10\,000\times\frac{1-1,02^{45}}{1-1,02}\approx 718\,927,1\approx 718\,927.$$

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

1. f est dérivable sur [1 ; 50] et sur cet intervalle :

$f'(x) = 2x + \dfrac{72}{10x+1} > 0$ car somme de termes supérieurs à zéro. La fonction f est donc croissante sur l'intervalle [1 ; 50] de $f(1) = 1 + 72\ln 11 \approx 173,6$ à $f(50) = 2500 + 72\ln 501 \approx 2947,6$.

2. a. Comme $(10x+1)^2 > 0$ sur [1 ; 50], on a :

$f'(x) = 0 \iff 2x(10x-59)(10x+61) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x & = & \frac{59}{10} \\ x & = & -\frac{61}{10} \end{array}\right. \iff x = 5,9$ seule solution dans l'intervalle [1 ; 50].

Comme $x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui du trinôme $(10x-59)(10x+61)$ qui est positif sauf entre les racines $-6,1$ et $5,9$. Donc :

- sur [1 ; 5,9], $h'(x) < 0$: la fonction h est décroissante sur [1 ; 5,9] de $h(1) = \frac{731}{11} - 72\ln 11$ à $105,61 - 72\ln 60$;
- sur [5,9; 50], $h'(x) > 0$: la fonction h est croissante sur [5,9; 50] de $105,61 - 72\ln 60$ à $h(50) = \frac{429500}{167} - 72\ln 501.$;
- $h(5,9)$ est le minimum de h sur [1 : 50].

b. Voir la question précédente.

c. La calculatrice donne :

$h(5,9) \approx -106$ et $h(50) \approx 2124$, donc $5,9 < \alpha < 50$;

$h(17) \approx -10$ et $h(18) \approx 21$, donc $17 < \alpha < 18$;

$h(17,3) \approx -0,6$ et $h(17,4) \approx 2,5$, donc $17,3 < \alpha < 17,4$;

$h(17,31) \approx -0,3$ et $h(17,32) \approx 0,03$, donc $17,31 < \alpha < 17,32$.

d. Sur $[1 ; \alpha]$, h est croissante donc $h(x) \leqslant h(\alpha) = 0$;

Sur $[\alpha ; 50]$, h est croissante donc $h(\alpha) = 0 \leqslant h(x)$.

3. a. Sur [1 ; 50], $g(x)\dfrac{f(x)}{x}$, donc :

$g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \dfrac{x\left(2x + \frac{720}{10x+1}\right) - \left(x^2 + 72\ln(10x+1)\right)}{x^2} =$

$\dfrac{2x^2 + \frac{720x}{10x+1} - x^2 - 72\ln(10x+1)}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

b. Comme $x^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui de $h(x)$. Donc :

Sur $[1 ; \alpha]$, $g'(x) \leqslant 0$: la fonction g est donc décroissante ;

Sur $[1 ; \alpha]$, $g'(x) \geqslant 0$: la fonction g est donc croissante.

Donc $g(\alpha$ est le minimum de la fonction g sur [1 ; 50].

c. On a vu que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$, donc en particulier $g'(\alpha) = \dfrac{h(\alpha)}{\alpha^2} = 0$.

Or $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \Rightarrow g'(\alpha) = \dfrac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow$

$\alpha f'(\alpha) - f(\alpha) = 0 \iff f'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$.

$g(\alpha) = f'(\alpha)$.

Partie B : application

1. Pour une production de x tonnes, le coût moyen C_M est égal à $g(x)$. cette fonction a pour minimum $g(\alpha)$.

Or on a démontré que $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + 72\ln(10\alpha + 1)}{\alpha}$.

On a vu que $17,31 < \alpha < 17,32$ comme la fonction f est croissante sur l'intervalle [17,31 ; 17,32], on a :

$f(17,31) < f(\alpha) < f(17,32)$: d'autre part :

$17,31 < \alpha < 17,32 \iff \dfrac{1}{17,32} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{17,31}$ et par produit de nombres positifs on obtient :

$\dfrac{f(17,31)}{17,32} < \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} < \dfrac{f(17,32)}{17,31}$ ou encore :

$38,7 < g(\alpha) < 38,8$.

Conclusion : le coût moyen minimal est supérieur à 38 000 € la tonne. C'est le prix minimum pour espérer faire un bénéfice.

2. Avec un prix de vente de 45 000 euros la tonne, la recette sera de $R(x) = 45x$.

Il y aura bénéfice si le coût total de production est inférieur à la recette soit :

$f(x) < 45x \iff x^2 + 72\ln(10x + 1) < 45x$: on peut utiliser la calculatrice.

Il y aura bénéfice si le coût moyen de production est inférieur au prix de vente, soit si

$g(x) < 45$.

Or on a vu que la fonction g a pour minimum $g(\alpha) \approx 38,75$.

Avec la calculatrice on trouve sur les intervalles $[1\ ;\ \alpha]$ et $[\alpha\ ;\ 50]$ deux solutions àl'équation $g(x) = 45$:

$x_1 \approx 9,04$ et $x_2 \approx 32,02$.

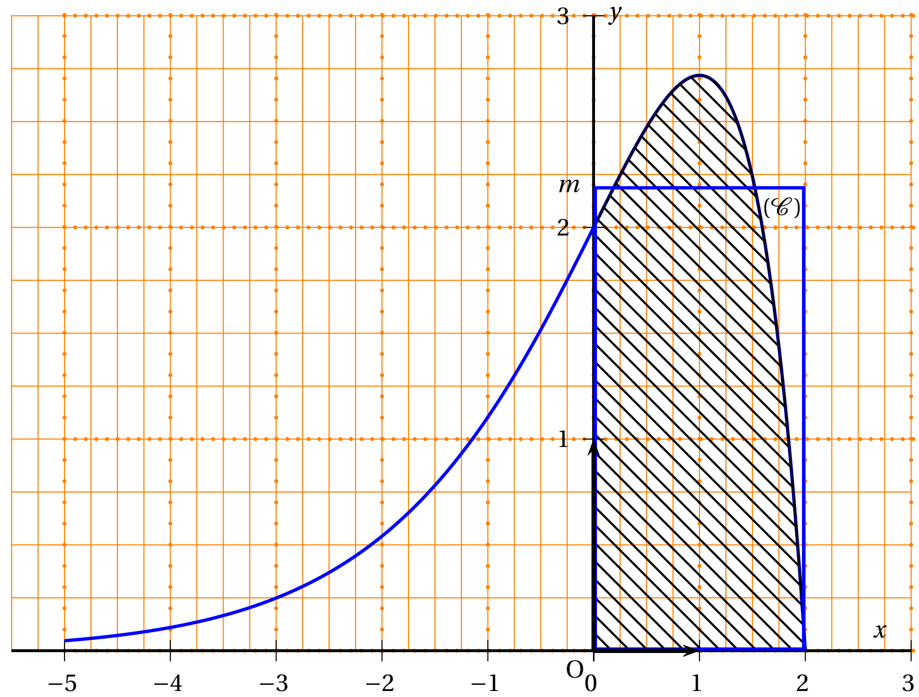
Conclusion :

- sur $[9,1\ ;\ \alpha]$, $g(x) < 45$ (la fonction est décroissante) ;
- sur $[\alpha\ ;\ 32]$, $g(x) < 45$ (la fonction est croissante).

L'entreprise fera un bénéfice pour une production comprise entre 9,1 et 32 tonnes.

Annexe 1

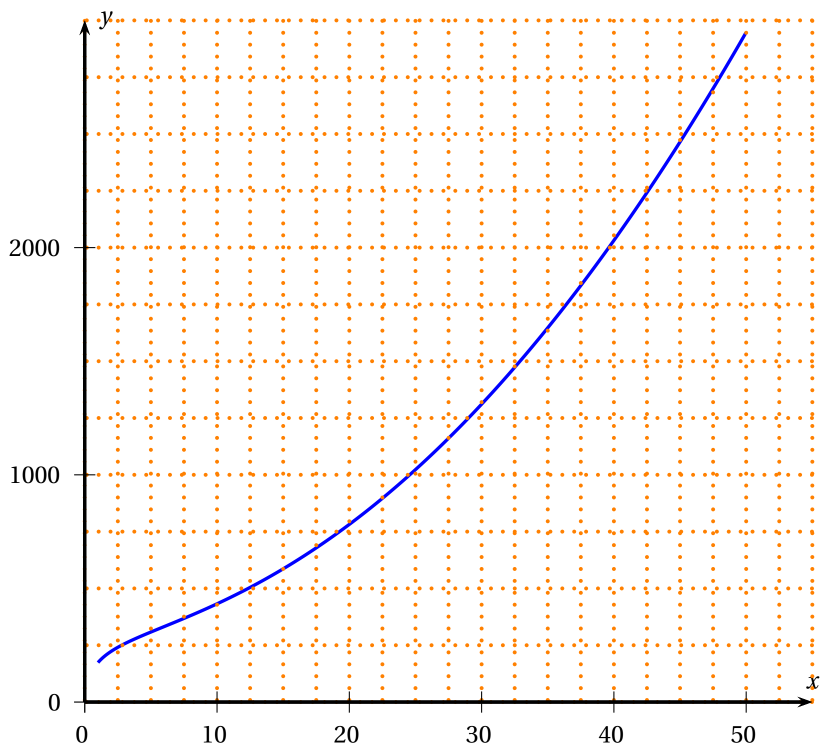
à utiliser pour l'exercice 1 et à rendre avec la copie



Annexe 2

à utiliser pour l'exercice 4, partie B et à rendre avec la copie

Représentation graphique de la fonction f



Représentations graphiques de fonctions f' et g