Corrigé du baccalauréat E.S. Liban 29 mai 2018

Exercice 1 **6 points**

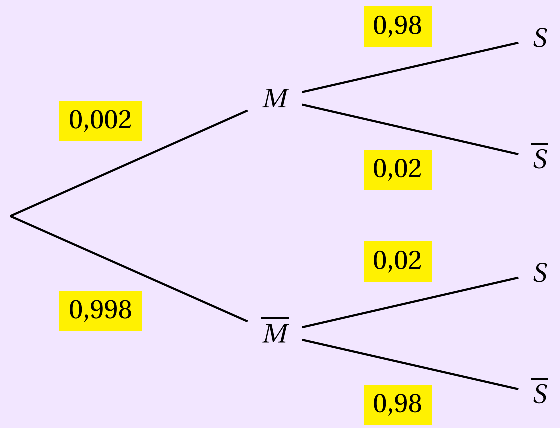
Commun à tous les candidats

1. **a.**

Solution :
$P(M) = \dfrac{1}{500} = 0{,}002$, $P_M(S) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}98$.

b.

Solution :



c.

Solution : M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap M) + P\left(S \cap \overline{M}\right) \\ &= P(M) \times P_M(S) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}\left(S\right) \\ &= 0{,}002 \times 0{,}98 + 0{,}998 \times 0{,}02 = 0{,}02192. \end{aligned}$$

d.

Solution : On cherche $P_S(M)$.

$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}002 \times 0{,}98}{0{,}02192} = \frac{49}{548} \approx 0{,}089.$$

2. **a.**

Solution : On répète $n = 80$ fois, de manière indépendante, une expérience n'ayant que deux issues dont le succès est S de probabilité $p = P(S) = 0{,}021\,92$
La variable aléatoire X comptant le nombre de succès parmi ces 80 expériences suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}021\,92$

b.

Solution : $E(X) = np = 1{,}7536$ donc en moyenne, sur 80 passages, le portique sonne 1,75 fois donc moins de deux voyageurs parmi les 80 feraient sonner le portique.

c.

- **Solution :** On cherche $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,83$
- **Solution :** On cherche $P(X \leqslant 5) \approx 0,992$

d.

Solution : $P(X \leqslant 2) \approx 0,7 < 0,9$ et $P(X \leqslant 3) \approx 0,9008 > 0,9$.
donc le plus petit entier cherché est $n = 3$

Exercice 2 **5 points**
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité et candidats de L

1. a.

Solution : À la fin du 1^{er} mois, Maya a dépensé un quart de 20 € soit € puis a replacé 20 €
Elle dispose donc de 20-5+20=35 € à la fin du 1^{er} mois. $u_1 = 35$.

b.

Solution : u_2 est la somme disponible à la fin du 2-ième mois, or lors de ce mois, elle dépense le quart de 35 € soit 8,75 € puis place 20 €
$u_2 = 35 - 8,75 + 20 = 46,25$

2.

a.

Solution :

Valeur de U	20	35	46,25	54,69
Valeur de N	0	1	2	3
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	vrai

Valeur de U	61,02	65,76	69,32	71,99
Valeur de N	4	5	6	7
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	faux

b.

Solution : La valeur affichée à la fin de l'algorithme est $n = 7$.
Cela signifie que la somme disponible pour Maya dépassera 70 € à partir de la fin du 7-ième mois

3.

a.

Solution :
Pour tout entier n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = (0{,}75u_n + 20) - 80 = 0{,}75u_n - 60 = 0{,}75\,(u_n - 80) = 0{,}75\,v_n$
On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$

b.

Solution : $v_0 = u_0 - 80 = -60$

c.

Solution : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $v_0 = -60$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0{,}75^n$.
Or $u_n = v_n + 80$ donc on a bien pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$.

d.

Solution : On cherche la somme disponible au 1er juin 2019 soit u_{12}
D'après le tableau de la question 2, $u_{12} = 80 - 60 \times 0{,}75^{12} \approx 78{,}10$.
Au 1er juin 2019, Maya possédera donc 78,10 €.

e.

Solution : $-1 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

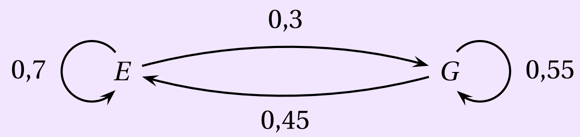
f.

Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n + 80) = 80$ par opération sur les limites
On en déduit qu'à long terme, la somme disponible en fin de mois va se stabiliser aux alentours de 80 €

Exercice 2 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

1.

Solution :
E_n « la personne possède un contrat chez *EfficaceRéseau* au 1er janvier $(2018 + n)$ »
G_n : « la personne possède un contrat chez *GenialPhone* au 1er janvier $(2018 + n)$ »
L'énoncé donne alors
$P_{E_n}(E_{n+1}) = 0{,}7$, $P_{E_n}(G_{n+1}) = 0{,}3$, $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0{,}55$ et $P_{G_n}(E_{n+1}) = 0{,}55$



2. **a.**

Solution : $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

b.

Solution : On cherche e_2 or $\begin{pmatrix} e_2 & g_2 \end{pmatrix} = P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}56875 & 0{,}43125 \end{pmatrix}$
On a donc bien environ 57 % des clients qui ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1er janvier 2020

3. **a.**

Solution : $\begin{pmatrix} e_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = P_{n+1} = P_n \times M = \begin{pmatrix} 0{,}7e_n + 0{,}45g_n & 0{,}3e_n + 0{,}55g_n \end{pmatrix}$
Donc pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0{,}7e_n + 0{,}45g_n$.

b.

Solution : $\begin{pmatrix} e_n & g_n \end{pmatrix}$ est un état probabiliste donc $g_n = 1 - e_n$
alors $e_{n+1} = 0{,}7e_n + 0{,}45g_n = 0{,}7e_n + 0{,}45(1 - e_n) = 0{,}25e_n + 0{,}45$
Donc pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0{,}25e_n + 0{,}45$.

4. **a.**

Solution :

```
E ⟵ 0,1
G ⟵ 0,9
Pour I allant de 1 à N
      E ⟵ 0,25 × E + 0,45
      G ⟵ 1 - E
Fin Pour
Afficher E et G
```

b.

Solution : pour $N = 3$, on obtient $E = e_3 \approx 0{,}59$ et $G = g_3 \approx 0{,}41$

c.

Solution : L'état stable $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ vérifie $\begin{cases} PM = P \\ a + b = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} PM = P \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}7a + 0{,}45b = a \\ 0{,}3a + 0{,}55b = b \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}3a + 0{,}45b = 0 \\ 0{,}3a - 0{,}45b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2a + 3b = 0 \\ 2a + 2b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -2a + 3b = 0 \\ 5b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0{,}6 \\ b = 0{,}4 \end{cases}$$

L'état stable est donc $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
Cela signifie qu'à long terme, la proportion de personnes signant un contrat avec *EfficaceRéseau* se stabilise aux alentours de 60%

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. $f'(4)$ est égal à :

A. 2	**B.** -1
C. 0,5	**D.** 0

Solution : explication donnée à titre indicatif

Il s'agit du coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 (dessinée en pointillés)

2. f est convexe sur l'intervalle :

A. $]-\infty; 2]$	**B.** $]-\infty; 0,5]$
C. $[0; 4]$	**D.** $[2; 5]$

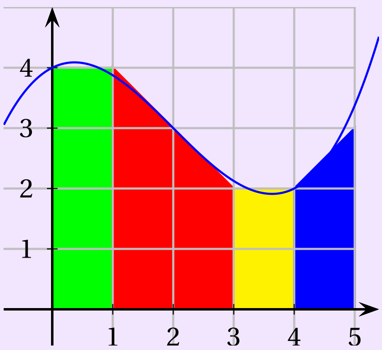
Solution : explication donnée à titre indicatif

Sur $[2; 5]$, f' est croissante

3. Une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 5]$ est :

A. $-0,1$	**B.** 2,5
C. 2,9	**D.** 14,5

Solution : explication donnée à titre indicatif



Sur $[0; 5]$, $f(x) > 0$ et l'aire située entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses peut être approchée par les rectangles et trapèzes dessinés.

Cette aire est donc d'environ

$4+6+2+2,5 = 14,5$.

Finalement la valeur moyenne est

$\mu = \frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx \approx \frac{1}{5} \times 14,5 = 2,9$

4.

A. $P(X \leqslant 651) \approx 0,6587$	**B.** $P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0,683$
C. $\sigma = 650$	**D.** $\mu = 649$

Solution : explication donnée à titre indicatif

Par symétrie de la courbe par rapport à l'axe d'équation $x = 650$

on a $P(X \geqslant 651) = P(X \leqslant 649) \approx 0,1587$

Donc $P(649 \leqslant X \leqslant 651) = 1 - 2 \times P(X \leqslant 649) \approx 1 - 0,3174 \approx 0,683$

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** **Solution :** $f = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $\begin{cases} u(x) = x + 2 - \ln(x) \\ v(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x} \\ v(x) = 1 \end{cases}$

Donc pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;25]$:

$f'(x) = \dfrac{x - 1 - (x + 2 - \ln(x))}{x^2} = \dfrac{-3 + \ln(x)}{x^2}$.

b. **Solution :** $-3 + \ln(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln(x) > 3 \Longleftrightarrow x > \mathrm{e}^3$

donc dans $[1\,;25]$, $-3 + \ln(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left]\mathrm{e}^3\,;\,25\right]$.

c. **Solution :**

x	1		e^3		25
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}$	$\nearrow$	$\frac{27-\ln(25)}{25}$

d. **Solution :**

Sur $\left[\mathrm{e}^3\,;\,25\right]$, $f(x)$ admet $\frac{27-\ln(25)}{25}$ pour maximum or $\frac{27-\ln(25)}{25} \approx 0{,}95 < 1{,}5$

Donc l'équation $f(x) = 1{,}5$ n'admet aucune solution sur $\left[\mathrm{e}^3\,;\,25\right]$.

Sur $\left[1\,;\,\mathrm{e}^3\right]$, f est continue et strictement décroissante

à valeurs dans $\left[f\left(\mathrm{e}^3\right)\,;\,3\right]$ or $1{,}5 \in \left[f\left(\mathrm{e}^3\right)\,;\,3\right]$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur $\left[1\,;\,\mathrm{e}^3\right]$.

Finalement l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution α sur $[1\,;5]$.

e. **Solution :** Par balayage on obtient $2{,}31 < \alpha < 2{,}32$.

2. **a.** **Solution :**

D'après la question précédente $f(x)$ est minimum pour $x = \mathrm{e}^3 \approx 20{,}09$.

Donc l'entreprise doit fabriquer environ 2009 pièces pour obtenir un un coût moyen minimal.

Ce coût moyen minimal est $f\left(\mathrm{e}^3\right) = 1 - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}95$ €.

b. **Solution :** D'après la question 1.e. on sait que $2{,}31 < \alpha < 2{,}32$.

Donc il faut fabriquer au minimum 232 pièces pour obtenir un coût moyen inférieur ou égal à 1,50 €.

c. **Solution :**
Le coût moyen minimal est d'environ 95 centimes, il n'est donc pas possible d'obtenir un coût moyen de 50 centimes.