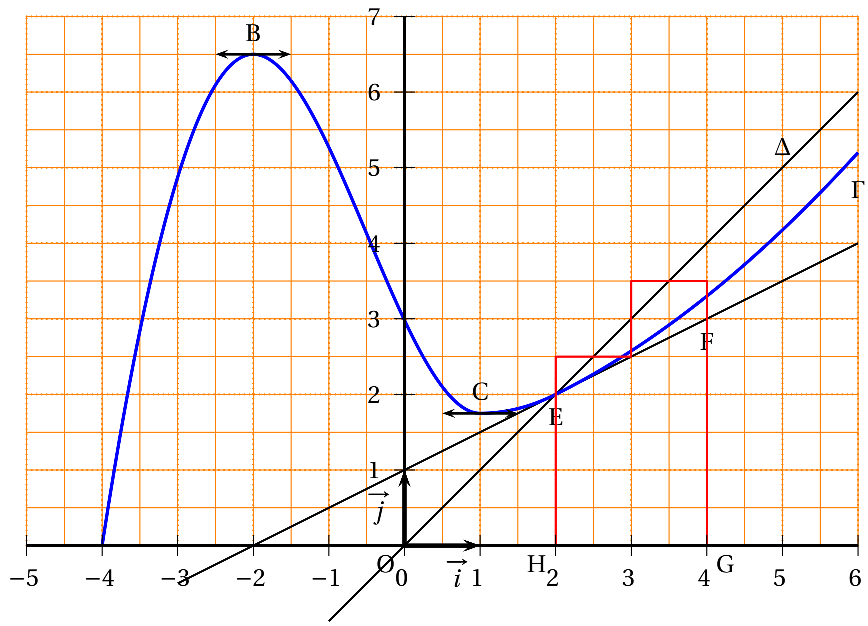
Corrigé du baccalauréat ES Liban mai 2008

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :

a. En -2 la tangente est horizontale : $f'(-2) = 0$.
En 2 le nombre dérivé est égal au coefficient directeur de la tangente (EF) ;
$f'(2) = \dfrac{3-2}{4-2} = \dfrac{1}{2}$.

b. La fonction est croissante sur $[-4\,;\,-2]$ puis sur $[1\,;\,4]$.

c. La courbe Γ est sous la droite Δ sur l'intervalle $]2\,;\,6]$

2. a. La fonction ln est croissante, donc la fonction g a les mêmes variations que la fonction f.

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to-4} f(x) = 0$, donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to-4} g(x) = -\infty$.

3. Encadrement d'une intégrale

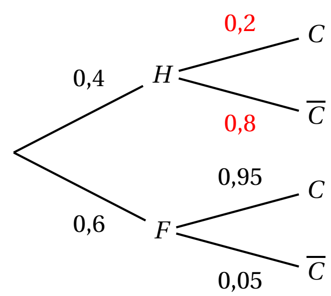
a. Sur l'intervalle $[2\,;\,4]$ la fonction f est positive donc l'aire de la surface limitée par Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ est égale (en unités d'aire à l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

b. L'aire du trapèze EFGH est égale à : $\dfrac{2+3}{2} \times 2 = 5$: elle est inférieure à I
Dans le polygone rouge il y a 24 petits carreaux soit 6 unités d'aire, don c :
$5 < I < 6$ en unités d'aire.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $p(H) = 0,4$, $p_F\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,95 = 0,05$ et $p_F(C) = 0,95$.



2. **a.** $p(F \cap C) = p(F) \times p_F(C) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$.

b. On sait que $p(C) = 0,65$, mais d'après la loi des probabilités totales :
$p(C) = p(C \cap H) + p(C \cap F) \iff 0,65 = p(C \cap H) + 0,57 \iff p(C \cap H) = 0,65 - 0,57 = 0,08$.

c. Il faut trouver $p_H(C) = \dfrac{p(H \cap C)}{p(H)} = \dfrac{0,08}{0,4} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

d. Voir l'arbre.

3. On a $p\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,65 = 0,35$.

Donc $p_{\overline{C}}(H) = \dfrac{p\left(\overline{C} \cap H\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,4 \times 0,8}{0,35} = \dfrac{0,32}{0,35} = \dfrac{32}{35} \approx 0,91$.

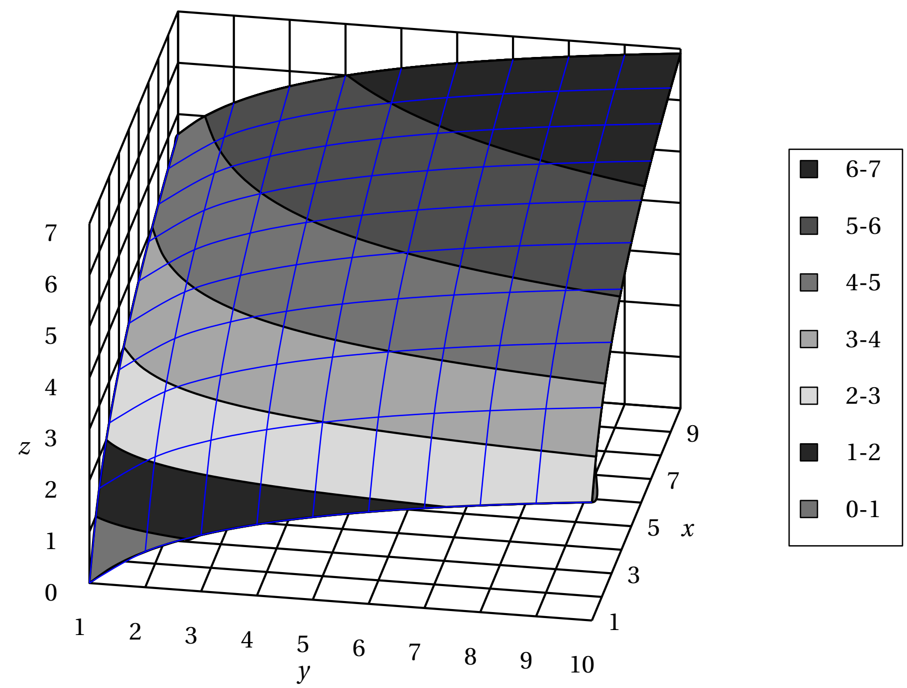
4. La variable aléatoire égale au nombre de personnes non inscrites aux cours collectifs suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et de probabilité $p = p\left(\overline{C}\right) = 0,35$.

La probabilité que toutes les fiches soient celles de membres inscrits aux cours collectifs est égale à : $(1 - 0,35)^3$.

Donc la probabilité qu'une personne au moins soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs est égale à $1 - 0,65^3 = 0,725\,375 \approx 0,73$ au centième près.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1. Les coordonnées de N vérifient l'équation :
$f(x\,;\,y) = \ln 30 = \ln 5 + 2\ln x \iff \ln 30 - \ln 5 = 2\ln x \iff \ln\frac{30}{5} = 2\ln x \iff \ln 6 = 2\ln x \iff \ln x = \dfrac{1}{2}\ln 6 \iff \ln x \ln\sqrt{6} \iff x = \sqrt{6}$.

2. a. x et y vérifient l'inéquation : $3x + 2y \leqslant 36$.

b. La relation précédente peut s'écrire :
$3x + 2y \leqslant 36 \iff 2y = 36 - 3x \iff y = 18 - \frac{3}{2}x$.
L'indice de satisfaction est donc une fonction de x :
$f(x\,;\,x) = z = \ln\left(18 - \frac{3}{2}x\right)2\ln x = \ln(18 - 1,5x) + 2\ln x$.

c. La fonction g est dérivable sur $[1\,;\,10]$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{-1,5}{18 - 1,5x} + 2\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1,5x + 36 - 3x}{x(18 - 1,5x)} = \dfrac{36 - 4,5x}{x(18 - 1,5x)}$.
Or $1 \leqslant x \leqslant 10 \iff 1,5 \leqslant 1,5x \leqslant 15 \iff -15 \leqslant -1,5x \leqslant -1,5 \iff 3 \leqslant 18 - 1,5x \leqslant 16,5$, ce qui montre que le dénominateur de $g'(x)$ est positif. Son signe est donc lui de $36 - 4,5x$.

- $36 - 4,5x > 0 \iff 36 > 4,5x \iff 8 > x$: la fonction g est donc croissante sur $[1\,;\,8]$.
- $36 - 4,5x < 0 \iff 36 < 4,5x \iff 8 < x$: la fonction g est donc décroissante sur $[8\,;\,10]$.
- $36 - 4,5x = 0 \iff 36 = 4,5x \iff 8 = x$: la fonction g a donc un maximum $g(8)$ en $x_0 = 8$.

d. Pour un budget de 38 €, on a vu que le niveau de satisfaction est maximal pour $x_0 = 8$ ce qui donne compte tenu de la relation $3x_0 + 2y_0 = 36$, $y_0 = 18 - 1,5 \times 8 = 18 - 12 = 6$.
Le niveau de satisfaction pour un budget de 36 euros sera maximal en achetant 8 kilos de fruits A et 6 kilos de fruits B.

Exercice 3 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

1. On sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-0,5x-3$.
   - $-0,5x-3>0 \iff -3>0,5x \iff -6>x$; la fonction étant définie sur $[0~;~+\infty[$ la fonction n'est pas croissante ;
   - $-0,5x-3<0 \iff -3<0,5x \iff -6<x$: la fonction est donc décroissante sur $[0~;~+\infty[$ de $f(0)=8$ à $0=\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,5x}=0$.
2. Sur $[0~;~+\infty[$, F est dérivable et sur cet intervalle :
   $F'(x)=-2\mathrm{e}^{-0,5x}+(-2x-20)\times(-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x}=\mathrm{e}^{-0,5x}(-2x+10)=\mathrm{e}^{-0,5x}=$
   $(x+8)\mathrm{e}^{-0,5x}=f(x)$: F est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.
3. $I=\displaystyle\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_2^4=F(4)-F(2)=$
   $(-2\times4-20)\mathrm{e}^{-0,5\times4}-\left[(-2\times2-20)\mathrm{e}^{-0,5\times2}\right]=-28\mathrm{e}^{-2}+24\mathrm{e}^{-1}=24\mathrm{e}^{-1}-28\mathrm{e}^{-1}\approx5,039\approx5,04$ au centième près.

Partie B : Applications économiques

1. Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros. Le nombre est égal à $f(2)=(2+8)\mathrm{e}^{-0,5\times2}=10\mathrm{e}^{-1}\approx3,6788$ soit 3 679objets demandés.
2. On a vu dans la partie A que la fonction f pour primitive la fonction F.
   La demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros est donc égale à :
   $\dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}I=\dfrac{1}{2}\left[24\mathrm{e}^{-1}-28\mathrm{e}^{-1}\right]=12\mathrm{e}^{-1}-14\mathrm{e}^{-1}\approx2\,520$ objets.
3. **a.** $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\times x=\dfrac{(-0,5x-3)\mathrm{e}^{-0,5x}}{(x+8)\mathrm{e}^{-0,5x}}\times x=\dfrac{-x(0,5x+3)}{x+8}=\dfrac{-0,5x^2-3x}{x+8}$.

   b. Comme $x>0$ et $f(x)>0$, le signe de $E(x)$ est celui de $f'(x)$; or on a vu dans la partie A que $f'(x)<0$ sur $[0~;~+\infty[$, donc $E(x)<0$: cela signifie que la demande diminue lorsque le prix augmente.

   c. Il faut résoudre l'équation :
   $E(x)=-3,5 \iff \dfrac{-0,5x^2-3x}{x+8}=-3,5 \iff -0,5x^2-3x=-3,5(x+8) \iff$
   $0,5x^2+3x-3,5x-28=0 \iff 0,5x^2-0,5x-28=0 \iff x^2-x-56=0.$
   Pour cette équation du second degré : $\Delta=1+4\times56=225=15^2>0$.
   Il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{1+15}{2}=8$ et $x_2=\dfrac{1-15}{2}=-7$, donc une seule solution positive.
   L'élasticité est égale à $-3,5$ pour un prix unitaire de 800 €.
   De 800 à 808 l'augmentation est de 1 % donc correspond à l'élasticité pour $x=8$, donc d'après la question précédente la variation de la demande est égale à $-3,5$ %.

Exercice 4 4 points

Commun à tous les candidats

A - Recherche d'un ajustement affine

1. La calculatrice donne après arrondi des coefficients au dixième : $y = 14,1x + 40,8$.
2. **a.** 2005 correspond au rang $x = 30$, d'où d'après l'ajustement :
   $y = 14,1 \times 30 + 40,8 = 423 + 40,8 = 463,8$.

   b. L'erreur en pourcentage est égale à :
   $\dfrac{463,8 - 430}{430} \times 100 = \dfrac{33,8}{430} \times 100 = \dfrac{3\,380}{430} \approx 7,86$, soit au dixième près 7,9 %.

B - Un autre modèle

1. 2005 correspond au rang $x = 30$ d'où d'après l'ajustement logarithmique :
   $f(30) = 197 \ln 30 - 237 \approx 433,036$ soit 433,0 au dixième près.
   Cet ajustement semble meilleur.
2. **a.** $f(x) \geqslant 460 \iff 197 \ln x - 237 \geqslant 460 \iff 197 \ln x \geqslant 697 \iff \ln x \geqslant \dfrac{697}{197} \iff x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{697}{197}}$.
   L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{697}{197}}\ ;\ +\infty\right[$.

   b. Le plus petit naturel n tel que $f(n) \geqslant 460$ est donc le plus petit naturel de l'intervalle précédent soit $n = 35$ (car $\mathrm{e}^{\frac{697}{197}} \approx 34,400\,5$) qui correspond à l'année 2010.