∽ Corrigé du baccalauréat ES Liban mai 2006 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

I. Étude graphique de la fonction f

1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation : $x = -1$.
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation : $y = \dfrac{5}{2}x - 10$.
3. Le nombre dérivé de f en 0 est : $f'(0) = 3$.
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$ est : 3.

II. Étude d'une fonction g

1. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp[f(x)] = +\infty$.
2. La fonction exponentielle étant croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$, les variations de g sont celles de f :

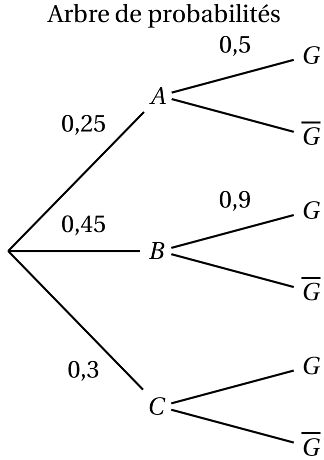
x	-1		1		3		$+\infty$
$g(x)$			e^2				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	0				e^{-1}		

3. Comme $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$, alors $g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$. D'où :
   - $g'(1) = f'(1)g(1) = 0 \times \mathrm{e}^2 = 0$.
   - $g'(0) = f'(0)g(0) = 3 \times \mathrm{e}^1 = 3\mathrm{e}$.
4. On a par croissance de la fonction exponentielle :
   $g(x) \leqslant \mathrm{e}^2 \iff \mathrm{e}^{f(x)} \leqslant \mathrm{e}^2 \iff f(x) \leqslant 2$. Sur la figure donnée on voit que les réels solutions sont ceux de l'intervalle $]-1\ ;\ 4,7]$ approximativement

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Arbre de probabilités



1. D'après l'énoncé : $P_A(G) = 0,5$, $P_B(G) = 0,9$ et $P(G) = 0,83$.
2. On a $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = 0,25 \times 0,5 = 0,125$.
3. $P(G \cup B) = P(G) + P(B) - P(G \cap B)$
   Or $P(G \cap B) = P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = 0,45 \times 0,9 = 0,405$.
   Donc $P(G \cup B) = 0,83 + 0,45 - 0,405 = 0,875$.
4. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
   $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G) \iff 0,83 =$
   $0,125 + 0,405 + P(C \cap G) \iff P(C \cap G) = 0,83 - 0,53 = 0,3$.
   Or $P(C \cap G) = P(C) \times P_C(G) \iff 0,3 = 0,3 \times P_C(G) \iff = P_C(G) = 1$.

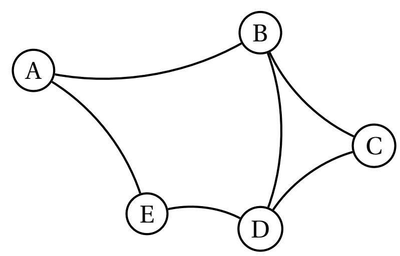
   b. On peut dire que tous les crocus ont germé.
5. Il faut trouver $P_G(C) = \dfrac{P(G \cap C)}{P(G)} = \dfrac{0,3}{0,83} \approx 0,361\,4$ soit $0,361$ au millième près.
6. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,83$.
   La probabilité qu'aucun bulbe ne germe est : $0,83^0 \times (1 - 0,83)^3 \approx 0,004\,9$ soit 0,005 au millième près.
   La probabilité qu'au moins un des trois bulbes choisis germe est donc égale à $1 - 0,005 = 0,995$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.

Graphe G

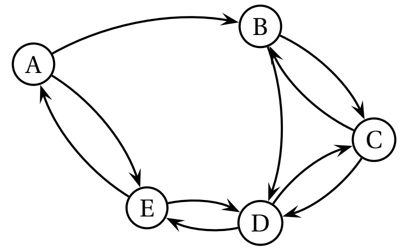


a. Soit γ le nombre chromatique de ce graphe.
Comme il y a un sommet de plus haut degré 3, on a $\gamma \leqslant 4$.
Mais $\{B, C, D\}$ est un sous-graphe complet d'ordre 3, donc $\gamma \geqslant 3$.
Conclusion : $3 \leqslant \gamma \leqslant 4$.
Il suffit colorer A et D de la même couleur, ainsi que B et E, et enfin C d'une troisième couleur : donc $\gamma = 3$.

b. Le graphe contient-il une chaîne eulérienne ? : il est évident que la chaîne A–B–C–D–E contient tous les sommets ; pour toute paire de sommets distincts il existe une chaîne les reliant : le graphe est connexe.
Il y a deux sommets de degré impair (3) : B et D, donc d'après le théorème d'Euler il existe une chaîne eulérienne.
Exemple de parcours : D–B–C–D–E–A–B

2.

Graphe G′



a. On a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Le nombre de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B est à la ligne 5 et à la colonne 2 : il y a donc 5 chemins :

D–C–B–D–C–B ; D–C–D–E–A–B ; D–E–D–E–A–B ; D–E–A–E–A–B ;

D–E–A–B–C–B.

c. Il faut trouver un cycle partant de A ; d'après M^5 il n'existe qu'un chemin fermé de longueur 5 partant de A et arrivant en A, le chemin : A–B–C–D–E–A : c'est bien un cycle et c'est le seul.

Le même raisonnement pour B donne 5 chemins passant par B et parmi ceux-ci B–C–D–E–A–B et B–D–E–D–C–B ont des arcs orientés distincts : il y a donc pour B deux cycles de longueur 5.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** • En 1999 $60,32 \times 0,342 \approx 20,629$ soit environ 20,63 millions de personnes étaient équipées d'un téléphone portable.

   • En 2004 $62,18 \times 0,716 \approx 44,521$ soit environ 44,52 millions de personnes étaient équipées d'un téléphone portable.

   b. Le pourcentage d'augmentation du taux de pénétration entre 1999 et 2004 est : $\dfrac{71,6}{34,2} \approx 2,093\,57$ soit environ 109,36 %.

2. Voir ci-dessous

3. **a.**

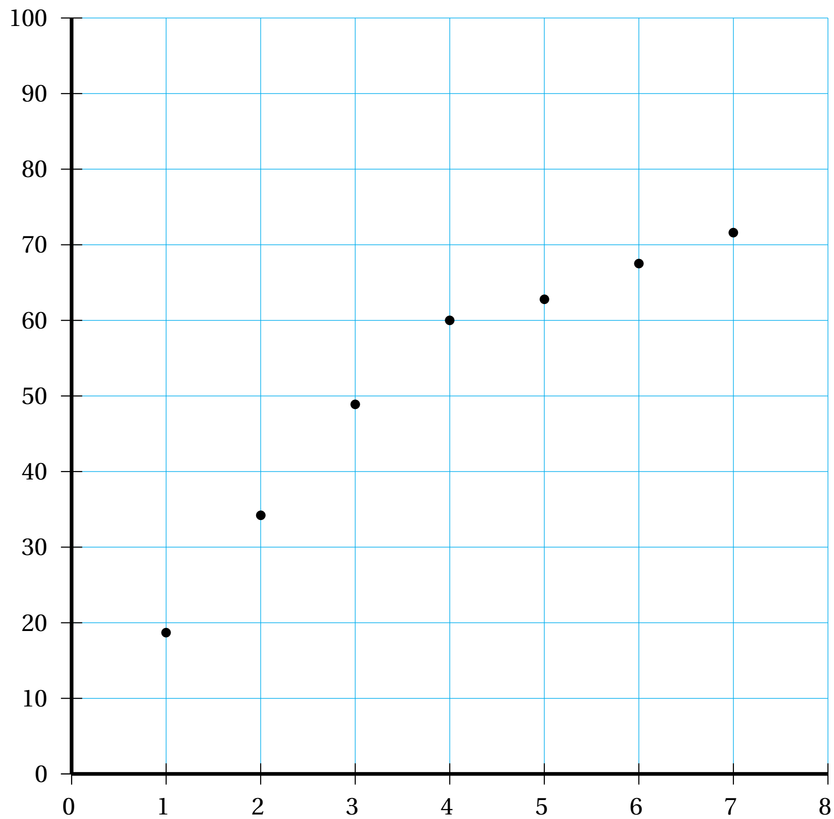
x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

   b. La calculatrice donne $y = 28,11z + 17,8$.

4. **a.** L'année 2006 correspond au rang 9.

   On admet que $y = 28,11z + 17,8$ soit $y = 28,11 \ln x + 17,8$, soit pour $x = 9$, $y = 28,11 \times \ln 9 + 17,8 = 252,99 + 17,8 = 79,564 \approx 79,56$

   Si l'ajustement est fiable, le taux de pénétration en 2006 sera environ de 79,56 %.



b. Il faut trouver le rang n tel que :

$28,11\ln n + 17,8 \geqslant 85 \iff 28,11\ln n \geqslant 67,2 \iff \ln n \geqslant \dfrac{67,2}{28,11} \iff n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{67,2}{28,11}}$.

Or $\mathrm{e}^{\frac{67,2}{28,11}} \approx 10,9$. Il faut donc que n soit au moins égal à 11.

Le taux de pénétration dépassera 85 % à partir de 2008.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4\,;\,20]$ par

$$f(x) = (x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5}.$$

Partie A :

1. On a sur l'intervalle $[4\,;\,20]$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-0,25x+5} - 0,25(x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5} = \mathrm{e}^{-0,25x+5}(1-0,25(x-4)) = \mathrm{e}^{-0,25x+5}(1-0,25x+1) = (2-0,25x)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
2. Comme quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-0,25x+5} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2-0,25x$.
   - $2-0,25x > 0 \iff 2 > 0,25x \iff 8 > x$: sur $]8\,;\,20]$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante ;
   - $2-0,25x < 0 \iff 2 < 0,25x \iff 8 < x$: sur $[4\,;\,8[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante ;
   - $f(8) = 4\mathrm{e}^3 \approx 80,34$ est donc le maximum de la fonction f sur $[4\,;\,20]$.

   D'autre part $f(4) = 0$ et $f(20) = 16$.
3. **a.** Sur l'intervalle $[4\,;\,20]$ la fonction F est dérivable et :
   $F'(x) = -4\mathrm{e}^{-0,25x+5} - 0,25 \times \left(-4x\mathrm{e}^{-0,25x+5}\right) = \mathrm{e}^{-0,25x+5}(-4+x) = (x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5} = f(x)$.
   La fonction est donc une primitive de f sur $[4\,;\,20]$.

b. D'après la question précédente :
$\displaystyle\int_4^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_4^{20} = F(20) - F(4) = -4\times 20\mathrm{e}^{-0,25\times20+5} - \left(-4\times 4\mathrm{e}^{-0,25\times4+5}\right) = 16\mathrm{e}^4 - 80 \approx 793,57$.

Partie B :

1. N centrales reviennent à $N\times 4 = 4\mathrm{e}^{-0,25x+5}$ sur lesquelles on récupère $Nx = x\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
   Le bénéfice est donc égal à : $x\mathrm{e}^{-0,25x+5} - 4\mathrm{e}^{-0,25x+5} = (x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5} = f(x)$.
2. On a vu à la partie A que le maximum de f est sur $[4\,;20]$, $f(8) = 4\mathrm{e}^3 \approx 80,342$, soit à l'euro près 8 034 €.
3. Lé bénéfice moyen est égal à la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;\,20]$, soit :
   $\dfrac{1}{20-4}\displaystyle\int_4^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{16}[F(x)]_4^{20} = \dfrac{F(20)-F(4)}{16} = \dfrac{16\mathrm{e}^4-80}{16} = \mathrm{e}^4 - 5 \approx 49,5982$ centaines d'euros soit à l'euro près 4 960 €.